Geometria Differenziale (Prof. P. Piccinni) - Prova in itinere del 20.1.2016

Esercizio 1. Siano (x, y, z) le coordinate di $\mathbb{R}^3$. Si considerino le 1-forme differenziali:

$$\phi = \frac{x}{x^2+y^2+z^2}\ dx + \frac{y}{x^2+y^2+z^2}\ dy + \frac{z}{x^2+y^2+z^2}\ dz,$$

$$\psi = \frac{-y}{x^2+y^2}\ dx + \frac{x}{x^2+y^2}\ dy,$$

e le curve chiuse

$$\mathcal{C}_1 : \begin{cases} x = 2+\cos u \\ y = 0 \\ z = \sin u \end{cases} , \qquad \mathcal{C}_2 : \begin{cases} x = 3\cos v \\ y = 3\sin v \\ z = 0 \end{cases} ,$$

$(u, v \in [0, 2\pi])$, rispettivamente meridiano e parallelo di un toro T di $\mathbb{R}^3$.

i) Determinare gli aperti A_ϕ e A_ψ di $\mathbb{R}^3$ in cui sono definite le 1-forme rispettivamente ϕ e ψ, e stabilire se ϕ e ψ sono chiuse e se sono esatte nei loro aperti A_ϕ e A_ψ di definizione.

ii) Calcolare $\int_{\mathcal{C}_1}\phi$, $\int_{\mathcal{C}_2}\phi$ $\int_{\mathcal{C}_1}\psi$, $\int_{\mathcal{C}_2}\psi$.

iii) Scrivere la 2-forma $\phi\wedge\psi$, determinarne l'aperto $A_{\phi\wedge\psi}$ di definizione e stabilire se $\phi\wedge\psi$ è chiusa.

iv) Determinare il valore dell'integrale $\int_T \phi\wedge\psi$.

Soluzione: i) Gli aperti A_ϕ e A_ψ si ottengono guardando i denominatori dei coefficienti delle due 1-forme: dunque $A_\phi = \mathbb{R}^3 - O$, $A_\psi = \mathbb{R}^3$ - asse z. È $\phi = d\frac{1}{2}\ log\ (x^2+y^2+z^2)$, dunque ϕ è esatta in A_ϕ, mentre la ψ è la ben nota 1-forma d'angolo "$d\theta$", chiusa e non esatta in A_ψ.

ii) Essendo ϕ esatta, il suo integrale su curve chiuse è nullo: dunque $\int_{\mathcal{C}_1}\phi = \int_{\mathcal{C}_2}\phi = 0$. È anche $\int_{\mathcal{C}_1}\psi = 0$, per il teorema di Stokes, essendo $\mathcal{C}_1$ bordo di un cerchio contenuto nell'aperto di definizione A_ψ. L'ultimo integrale è 2π, variazione dell'angolo θ sulla circonferenza $\mathcal{C}_2$, che può essere anche ottenuta per calcolo diretto: $\int_{\mathcal{C}_2}\psi = \int_0^{2\pi}(sen^2\ u + cos^2\ u)\ du = 2\pi$.

iii) Il prodotto esterno si ottiene ricordando l'alternanza del prodotto dei differenziali $dx,\ dy,\ dz$:

$$\phi\wedge\psi = \frac{1}{(x^2+y^2)(x^2+y^2+z^2)}[(x^2+y^2)\ dx\wedge dy - yz\ dz\wedge dx - xzdy\wedge dz].$$

Dalla formula $d(\phi\wedge\psi) = d\phi\wedge\psi - \phi\wedge d\psi$ si riconosce che $d(\phi\wedge\psi) = 0$ nel suo aperto $A_{\phi\wedge\psi}$ di definizione, che come al punto i) si ottiene guardando i denominatori dei coefficienti della 2-forma: $A_{\phi\wedge\psi} = \mathbb{R}^3$ - asse z.

iv) Il toro T, di equazioni parametriche $x = (2+cos\ u)\ cos\ v,\ y = (2+cos\ u)\ sen\ v,\ z = sen\ u$ è bordo del dominio W di $\mathbb{R}^3$ dato da:

$$W = \{(x,y,z) : x = (2+t\ cos\ u)\ cos\ v,\ y = (2+t\ cos\ u)\ sen\ v,\ z = t\ sen\ u\},$$

con $t \in [0,1], u, v \in [0, 2\pi]$. Ne segue che l'integrale della 2-forma chiusa $\phi\wedge\psi$ sul toro T è nullo per il teorema di Stokes:

$$\int_T \phi\wedge\psi = \int_{\partial W}\phi\wedge\psi = \int_W d(\phi\wedge\psi) = 0.$$

Esercizio 2. Si consideri in $\mathbb{R}^3$ la superficie $\mathcal{S}$ di equazione cartesiana $z = x^3 - y^3$.

i) Si determini la curvatura gaussiana K nei punti di $\mathcal{S}$, precisandone i punti ellittici ($K > 0$), iperbolici ($K < 0$), parabolici ($K = 0$).

ii) Descrivere la curva $\mathcal{C} \subset \mathcal{S}$ costituita dai punti parabolici di $\mathcal{S}$ e precisare se $\mathcal{C}$ è una curva piana o sghemba.

iii) Determinare la curvatura e la torsione della curva $\mathcal{C}$.

iv) Si consideri in $\mathbb{R}^3$ la 1-forma

$$\omega = 3x^2 dx - 3y^2 dy - dz.$$

Determinare il valore di ω sui vettori tangenti a $\mathcal{C}$.

Soluzione. i) Posto $\phi(x, y) = x^3 - y^3$, risulta: $\phi_x = 3x^2$, $\phi_y = -3y^2$, $\phi_{xx} = 6x$, $\phi_{xy} = 0$, $\phi_{yy} = -6y$. Essendo $\vec{N} = \frac{(-3x^2, 3y^2, 1)}{\sqrt{9x^4+9y^4+1}}$ il versore normale, si ha quindi: $E = 1 + 9x^4$, $F = -9x^2y^2$, $G = 1 + 9y^2$, $l = \frac{6x}{\sqrt{9x^4+9y^4+1}}$, $m = 0$, $n = \frac{-6y}{\sqrt{9x^4+9y^4+1}}$.. La curvatura gaussiana di $\mathcal{S}$ è quindi

$$K(x, y) = \frac{-36xy}{(9x^4 + 9y^4 + 1)^2},$$

e i punti ellittici e iperbolici sono quelli ove rispettivamente è $xy < 0$ e $xy > 0$. L'origine $(0, 0, 0)$ è unico punto planare, mentre i punti parabolici sono tutti gli altri punti di $\mathcal{S}$ con $xy = 0$.

ii) La curva $\mathcal{C} \subset \mathcal{S}$ luogo dei punti parabolici è unione delle due curve piane $\mathcal{C}_1 : x = 0, z = -y^3, y \neq 0$ $\mathcal{C}_2 : y = 0, z = x^3, x \neq 0$.

iii) La torsione nei punti di $\mathcal{C}$ è identicamente nulla, essendo $\mathcal{C}$ unione di due curve piane. Per la curvatura può usarsi la formula della curvatura di curve piane, assumendo come parametro t rispettivamente la y e la z su $\mathcal{C}_1$ e su $\mathcal{C}_2$. Risulta in entrambi i casi: $k(t) = \frac{6|t|}{(1+9t^4)^{\frac{3}{2}}}$.

iv) La 1-forma ω è gradiente della funzione $F(x, y, z) = x^3 - y^3 - z$. Dunque ω è nulla su tutti i vettori tangenti alla superficie $\mathcal{S}$ e in particolare ai vettori tangenti alla curva $\mathcal{C}$ luogo dei suoi punti parabolici.