Numero di matricola: .... Cognome: .... Nome: ....

Geometria Differenziale (Prof. P. Piccinni) - Prova scritta del 4.7.2016

Norme per le prove in itinere e le prove scritte d'esame

1. Scrivere subito numero di matricola, cognome e nome su questo foglio.
2. Utilizzare la parte bianca (fronte e retro) di questi fogli per la bella copia. I fogli protocollo distribuiti a parte saranno invece utilizzati per la minuta e non devono essere consegnati.
3. **Svolgere gli esercizi con ordine e completezza, dando breve indicazione del procedimento e dei calcoli eseguiti, senza far riferimento alla minuta. Nel giudizio si terrà conto della chiarezza di esposizione.**
4. Durante le prove si possono consultare testi e appunti, ma non si possono utilizzare calcolatrici o telefoni cellulari.
5. La durata della prova è di **1 ora e 30 minuti**. Durante la prova non è consentito uscire dall'aula.

Esercizio 1. Si consideri in $\mathbb{R}^3$, con coordianate cartesiane (x, y, z) la superficie S grafico della funzione

$$z = \log \frac{\cos y}{\cos x}.$$

i) Utilizzando le prime due coordinate $x = u$, $y = v$ come parametri su S, si determini l'aperto A del piano u, v dei parametri in cui le equazioni parametriche

$$\alpha(u, v) : \; x = x(u, v), y = y(u, v), z = z(u, v)$$

di S sono definite.

ii) Calcolare, in funzione dei parametri (u, v), i coefficienti E, F, G, l, m, n delle due forme fondamentali di S.

iii) Calcolare, sempre in funzione di (u, v), la curvatura media H e la curvatura gaussiana K di S. Esistono su S punti con $K > 0$?

iv) Descrivere la curva $\mathcal{C}$ intersezione di S con il piano $z = 0$.

Esercizio 2. Con riferimento alle coordinate (x, y) di $\mathbb{R}^2$, si consideri la 1-forma differenziale:

$$\omega \;=\; \frac{-4xy}{(x^2+y^2-1)^2+4y^2}\,dx \;+\; \frac{2(x^2-y^2-1)}{(x^2+y^2-1)^2+4y^2}\,dy.$$

i) Determinare l'aperto A di $\mathbb{R}^2$ in cui la 1-forma ω è definita.

ii) Stabilire se ω è chiusa.

iii) Si consideri poi la funzione

$$F(x, y) = \arctan \frac{2y}{x^2+y^2-1}$$

e si determini l'aperto U di $\mathbb{R}^2$ in cui F è definita.

iv) Si calcoli il differenziale dF di F in U e si confronti U con A e dF con ω.

v) Esiste una funzione $G(x, y)$ definita su A tale che $\omega = dG$?