Geometria differenziale (Prof. P. Piccinni)

Prova in itinere del 13.11.2015

1. Si consideri in $\mathbb{R}^3$, con coordinate cartesiane (x, y, z) la curva C di equazioni parametriche:

$$\vec{\alpha}(t) : \begin{cases} x(t) = \cosh t \\ y(t) = t \\ z(t) = \sinh t \end{cases}$$

essendo t un parametro variabile in $\mathbb{R}$.

(i) Calcolare le funzioni $k(t)$ e $\tau(t)$ di curvatura e di torsione della curva C. Individuare, nel piano euclideo con coordinate cartesiane (k, τ), l'insieme descritto dalle equazioni $k = k(t)$, $\tau = \tau(t)$, precedentemente determinate per la curva C, e al variare di t in $\mathbb{R}$.

(ii) Scrivere le equazioni parametriche del cilindro Γ_1, avente C come curva direttrice e generatrici parallele all'asse y. Individuare la curva $D_1 = \Gamma_1 \cap$ {piano xz}.

(iii) Scrivere le equazioni parametriche del cono Γ_2, avente C come curva direttrice e le cui generatrici passano per l'origine O di $\mathbb{E}^3$. Individuare la curva $D_2 = \Gamma_2 \cap$ {piano xz}.

(iv) Qual è la curva intersezione $\Gamma_1 \cap \Gamma_2$?

2. Si consideri in $\mathbb{R}^3$, con coordinate cartesiane (x, y, z) la superficie S rappresentata dal grafico della funzione $z = x^3 - y^3$.

(i) Assumendo $x = u,\ y = v$ si determinino il versore normale $\vec{N}$ di S, i coefficienti E, F, G, l, m, n delle due forme fondamentali e le funzioni $H(u, v)$ e $K(u, v)$ di curvatura media e di curvatura gaussiana di S.

(ii) Stabilire in quali punti del piano uv risulta $K = 0$, in quali $K > 0$ e in quali $K < 0$.

(iii) Determinare in quali punti del piano uv risulta $H = 0$.

(iv) Vi sono punti del piano uv in cui $H = K = 0$?