Geometria (Corso di laurea in Fisica, Canali A-C e D-O)
Prof. Barucci e Piccinni
25 settembre 2012

a. Scrivere subito canale, cognome e nome.
b. Utilizzare questi fogli per le risposte. I fogli protocollo distribuiti a parte sono invece per eventuali riflessioni o calcoli, e non vanno consegnati.
c. Durante la prova non si possono consultare testi e appunti né usare fogli diversi da quelli distribuiti.
d. Durante la prova non è consentito uscire dall'aula.

Tempo a disposizione: 2 ore

Canale............................**Cognome**..**Nome**..

1. Si consideri l'equazione $4z^3 + z = 0$, a coefficienti in $\mathbb{C}$. Stabilire quali tra le seguenti affermazioni sono vere (eventualmente anche più risposte):

   $\boxed{1}$ Le soluzioni sono $z_1 = 2i;\ z_2 = -2i, z_3 = 0$

   $\boxed{\bowtie 2}$ Le soluzioni sono $z_1 = \frac{1}{2i}, z_2 = -\frac{1}{2i}, z_3 = 0$

   $\boxed{\bowtie 3}$ Le soluzioni sono $z_1 = \frac{i}{2},\ z_2 = -\frac{i}{2}, z_3 = 0$

   $\boxed{4}$ Nessuna delle precedent.

2. Si considerino nello spazio $\mathbb{R}^3$ i seguenti cinque vettori $\vec{v}_1 = (1,1,3), \vec{v}_2 = (2,-1,1), \vec{v}_3 = (-1,5,7), \vec{v}_4 = (4,-5,-3), \vec{v}_5 = (6,0,8)$. Stabilire quali tra le seguenti affermazioni è vera (eventualmente anche più risposte):

   $\boxed{\bowtie 1}$ $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4, \vec{v}_5$ sono linearmente dipendenti

   $\boxed{\bowtie 2}$ $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4, \vec{v}_5$ sono complanari

   $\boxed{3}$ $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4, \vec{v}_5$ sono paralleli

   $\boxed{4}$ Nessuna delle precedenti

   Per la soluzione, si noti che il rango della matrice ottenuta con i vettori dati ha rango 2.

3. Si considerino nello spazio $\mathbb{R}^3$ i seguenti quattro punti $A = (\sqrt{3}/2, 3/2, 0), B = (0,1,1), C = (-\sqrt{3}/2, 1/2, 0), D = (0,1,-1)$. Stabilire quali tra le seguenti affermazioni è vera (eventualmente anche più risposte):

   $\boxed{\bowtie 1}$ A, B, C, D sono complanari e il piano che li contiene ha equazione $x - \sqrt{3}y + \sqrt{3} = 0$

   $\boxed{2}$ A, B, C, D sono vertici di un tetraedro di spigolo $\sqrt{2}$

   $\boxed{\bowtie 3}$ A, B, C, D sono vertici consecutivi di un quadrato di lato $\sqrt{2}$

   $\boxed{4}$ Nessuna delle precedenti

   Infatti le coordinate di tutti e quattro i punti annullano l'equazione del piano data in 1. Inoltre $\vec{AB} = \vec{DC}$ è un vettore di norma $\sqrt{2}$, ortogonale a $\vec{BC} = \vec{AD}$, che anche ha norma $\sqrt{2}$.

4. Si consideri nello spazio euclideo $\mathbb{R}^3$ la retta $r : x + 3y + z = 0,\ x - 2y - z = 0$, essendo (x, y, z) le coordinate cartesiane di $\mathbb{R}^3$. Stabilire quali tra le seguenti affermazioni sono vere (eventualmente anche più risposte):

$\boxed{\bowtie 1}$ r è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$

$\boxed{\bowtie 2}$ tutte le rette parallele ad r hanno parametri direttori $(1, -2, 5)$

$\boxed{3}$ r è contenuta nel piano $x - 2y + 5z = 0$

$\boxed{\bowtie 4}$ r è perpendicolare al piano $x - 2y + 5z = 0$

Si tratta di una retta che passa per l'origine di parametri direttori $l = 1, m = -2, n = 5$. Si ricordi, per 4, che i coefficienti dell'equazione di un piano indicano un vettore ortogonale al piano stesso.

5. Si consideri la matrice $A = \begin{pmatrix} 2/3 & 2/3 & 1/3 \\ 1/3 & -2/3 & 2/3 \\ 2/3 & -1/3 & -2/3 \end{pmatrix}$. Stabilire quali tra le seguenti affermazioni è vera:

$\boxed{1}$ A è invertibile e la sua inversa è $\begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 & 2/3 \\ 2/3 & -2/3 & -1/3 \\ 1/3 & 2/3 & 2/3 \end{pmatrix}$

$\boxed{2}$ A è invertibile e la sua inversa è $\begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 & -2/3 \\ 2/3 & -2/3 & 1/3 \\ 1/3 & 2/3 & -2/3 \end{pmatrix}$

$\boxed{\bowtie 3}$ A è invertibile e la sua inversa è $\begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 & 2/3 \\ 2/3 & -2/3 & -1/3 \\ 1/3 & 2/3 & -2/3 \end{pmatrix}$

$\boxed{\bowtie 4}$ A è una matrice ortogonale

La matrice in 3 è la trasposta di A ed è proprio l'inversa.

6. Sia $T : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ l'applicazione definita dalla formula:

$$T(A) = (A + A^2),$$

essendo $M_2(\mathbb{R})$ lo spazio vettoriale delle matrici reali 2×2, essendo $A^2 = A \cdot A$ il quadrato di A (e denotando con il simbolo $\cdot$ il prodotto righe per colonne). Stabilire quale tra le seguenti affermazioni è vera (eventualmente anche più risposte):

$\boxed{1}$ T è lineare e iniettiva

$\boxed{2}$ T è lineare e suriettiva

$\boxed{3}$ T non è lineare ma è iniettiva

$\boxed{\bowtie 4}$ Nessuna delle precedenti.

L'applicazione T non è lineare, infatti non sempre $T(A + B) = T(A) + T(B)$. Per esempio prendendo $A = B = I$(matrice identica), si ha $T(A + B) = 6I$ e $T(A) + T(B) = 4I$.

Inoltre l'applicazione non è neanche iniettiva: per esempio $-I$ e la matrice nulla hanno la stessa immagine.

7. Sia $T : V \longrightarrow V$ un endomorfismo dello spazio vettoriale $V = V_K^n$. Stabilire quale tra le seguenti affermazioni è corretta (eventualmente anche più risposte):

$\boxed{\bowtie 1}$ Se T è suriettivo, allora è anche iniettivo

$\boxed{\bowtie 2}$ Se T è iniettivo, allora è anche suriettivo

$\boxed{\bowtie 3}$ Se T non ammette lo zero di K come autovalore, allora è iniettivo

$\boxed{4}$ Se T è suriettivo, allora il determinante di ogni matrice ad esso associata è nullo

1 e 2 discendono dal fatto che $\dim \operatorname{Ker} T + \dim \operatorname{Im} T = n$. Inoltre se T non ammette lo zero di K come autovalore, allora la matrice che lo rappresenta rispetto a una base fissata ha determinante diverso da zero, da cui la matrice ed anche l'endomorfismo sono invertibili.

8. Sia $A \in M_n(\mathbb{C})$ una matrice complessa quadrata di ordine n. Si può affermare che $\det A$ sia il prodotto dei suoi autovalori, contati con la rispettiva molteplicità algebrica?

$\boxed{\bowtie 1}$ Sì, sempre

$\boxed{2}$ Solo se A è diagonalizzabile

$\boxed{3}$ Solo se A è la matrice nulla

$\boxed{4}$ Nessuna delle precedenti

Infatti $\det A$ è sempre il termine noto del polinomio caratteristico. Nel caso complesso, il polinomio caratteristico ha tutte le radici in $\mathbb{C}$, da cui il suo termine noto è il prodotto delle radici.

9. Si considerino in $M_2(\mathbb{R})$ le matrici:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad M_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

Stabilire quale tra le seguenti affermazioni è vera (eventualmente anche più risposte):

$\boxed{\bowtie 1}$ A_1, A_2, A_3, A_4 formano una base di $M_2(\mathbb{R})$

$\boxed{2}$ A_1, A_2, A_3, A_4 sono tutte diagonalizzabili

$\boxed{3}$ A_1, A_2, A_3, A_4 sono tutte non diagonalizzabili

$\boxed{4}$ Nessuna delle precedenti

Infatti le quattro matrici sono linearmente indipendenti e $M_2(\mathbb{R})$ è uno spazio vettoriale di dimensione 4. Le altre risposte sono sbagliate, perché A_1 è diagonalizzabile, avendo due autovalori distinti, mentre A_2 non lo è (l'unico autovalore, 1, di molteplicità algebrica 2, ha un autospazio di dimensione 1).

10. Si considerino i vettori $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ di $\mathbb{R}^3$, a due a due ortogonali e tutti diversi dal vettore nullo. Stabilire quali tra le seguenti affermazioni è vera (eventualmente anche più risposte):

$\boxed{\bowtie 1}$ $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ sono linearmente indipendenti

$\boxed{2}$ ognuno dei tre vettori è prodotto vettoriale degli altri due (considerati in ordine opportuno)

$\boxed{\bowtie 3}$ $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ sono autovettori di una matrice diagonale

$\boxed{\bowtie 4}$ $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ sono autovettori di una matrice simmetrica

Infatti 1 è nota dalla teoria e, per 3 e 4, basta pensare che i vettori sono autovettori della matrice identica.