

Seconda prova in itinere di Geometria (Corso di laurea in Fisica, Canali A-C e D-O)

Prof. Barucci e Piccinni

27 gennaio 2012

- Scrivere subito canale, cognome e nome.
- Utilizzare questi fogli per le risposte. I fogli protocollo distribuiti a parte sono invece per eventuali riflessioni o calcoli, e non vanno consegnati.
- Durante la prova non si possono consultare testi e appunti né usare fogli diversi da quelli distribuiti.
- Durante la prova non è consentito uscire dall'aula.

*Tempo a disposizione: 2 ore*

Canale.....Cognome.....Nome.....
----------------------------------

1. Sia  $A \in M_n(\mathbb{R})$  e sia  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Stabilire quale tra le seguenti affermazioni è vera

- $\det(\lambda A) = (-1)^n \lambda \det A$
- $\det(\lambda A) = (-1)^n \lambda^n \det A$
- $\det(\lambda A) = \lambda \det A$
- $\det(\lambda A) = \lambda^n \det A$
- Nessuna delle precedenti

2. Stabilire quali tra le seguenti affermazioni sono vere (eventualmente anche più risposte)

- Sia  $A \in M_2(\mathbb{R})$  simmetrica ( $A = A^t$ ). Allora  $\det A \geq 0$
- Sia  $A \in M_2(\mathbb{R})$  antisimmetrica ( $A = -A^t$ ). Allora  $\det A \geq 0$
- Sia  $A \in M_3(\mathbb{R})$  simmetrica ( $A = A^t$ ). Allora  $\det A = 0$
- Sia  $A \in M_3(\mathbb{R})$  antisimmetrica ( $A = -A^t$ ). Allora  $\det A = 0$
- Nessuna delle precedenti

3. Sia  $A \in M_n(\mathbb{R})$ , sia  $M$  la sua trasposta e siano  $I$  e  $0$  risp. la matrice identica e la matrice nulla. Stabilire quali tra le seguenti implicazioni sono corrette (anche più risposte)

- $AA^t = I \Rightarrow \det A = \pm 1$
- $\det A = 1 \Rightarrow AA^t = I$
- $AA^t = 0 \Rightarrow A = 0$
- $AA^t = 0 \Rightarrow \det A = 0$

4. Si consideri nello spazio euclideo  $\mathbb{R}^3$  la retta  $r$  di equazioni cartesiane  $x + 2z - 1 = 0$ ,  $y + 4z - 3 = 0$ , essendo  $(x, y, z)$  le coordinate cartesiane di  $\mathbb{R}^3$ . Stabilire quali tra le seguenti affermazioni sono vere (eventualmente anche più risposte):

- 1  $r$  ha parametri direttori  $(1, 2, 4)$
- 2  $r$  ha parametri direttori  $(2, 4, 1)$
- 3  $r$  ha parametri direttori  $(-2, -4, 1)$
- 4  $r$  è parallela al piano  $2x + y + 8z - 1 = 0$

5. Si considerino in  $\mathbb{R}^3$  le rette  $r_1 : x - z - 1 = 0$ ,  $y - 2z = 0$ ,  $r_2 : x - 3z - 1 = 0$ ,  $y - z = 0$ ,  $r_3 : x + z - 1 = 0$ ,  $y + 4 = 0$  essendo  $(x, y, z)$  le coordinate di  $\mathbb{R}^3$ .

Stabilire quale tra le seguenti affermazioni è vera:

- 1 Non vi sono relazioni di perpendicolarità tra  $r_1, r_2, r_3$
- 2 Le tre rette sono a due a due perpendicolari
- 3 Solo due tra le rette  $r_1, r_2, r_3$  sono perpendicolari ma esse non sono incidenti
- 4 Solo due tra le rette  $r_1, r_2, r_3$  sono perpendicolari ed esse sono anche incidenti

6. Sia  $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{C})$  una matrice complessa quadrata di ordine  $n$ , e sia  $T(A) = \bar{A}$ , dove  $\bar{A} = (\bar{a}_{ij})$  è la matrice coniugata di  $A$ .  $T : M_n(\mathbb{C}) \rightarrow M_n(\mathbb{C})$  è un'operatore lineare, rispetto alla struttura di spazio vettoriale complesso di  $M_n(\mathbb{C})$ ?

- 1 Sì, per ogni  $n$
- 2 E' lineare solo per  $n = 1$
- 3 Non è mai lineare

7. Sia  $A \in M_3(\mathbb{R})$  una matrice reale quadrata di ordine 3 *invertibile*. Stabilire quali tra le seguenti affermazioni sono vere (eventualmente anche più risposte):

- 1 Gli autovalori di  $A$  sono necessariamente distinti
- 2  $A$  è diagonalizzabile
- 3  $A$  non può ammettere l'autovalore  $\lambda = 0$
- 4 Nessuna delle precedenti

8. Si consideri la matrice  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix}$ . Stabilire quali tra le seguenti affermazioni sono vere (eventual-

mente anche più risposte):

- 1  $A$  non ammette autovalori reali
- 2  $A$  ammette autovalori reali ma non tutte la molteplicità algebriche coincidono con le molteplicità geometriche
- 3  $A$  ammette autovalori reali non distinti, ma tutte la molt. algebriche coincidono con le molt. geometriche
- 4  $A$  ammette tre autovalori reali distinti
- 5  $A$  è diagonalizzabile

9. Sia  $V = \mathbb{R}_{\leq 3}[x] = \{P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3\}$  lo spazio vettoriale dei polinomi di grado  $\leq 3$  a coefficienti reali, e sia  $T : V \rightarrow V$  l'applicazione lineare (di derivata seconda) definita da  $T(P(x)) = P''(x)$ , ovvero

$$T(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3) = 2a_2 + 6a_3x.$$

Stabilire quali tra le seguenti affermazioni sono vere (eventualmente anche più risposte):

- 1  $T$  non ammette autovalori
- 2  $T$  ammette solo l'autovalore  $\lambda = 0$
- 3  $T$  è diagonalizzabile
- 4 Nessuna delle precedenti

10. Sia

$$g : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

l'applicazione definita da

$$\left( \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} \right) \longrightarrow x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_2y_2$$

Stabilire quali tra le seguenti affermazioni sono vere (anche più risposte):

- 1  $g$  non è un prodotto scalare
- 2  $g$  è un prodotto scalare e la matrice che lo rappresenta rispetto alle base canonica è  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$
- 3  $g$  è un prodotto scalare e la matrice che lo rappresenta rispetto alle base  $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$  è  $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$
- 4  $g$  è un prodotto scalare e la matrice che lo rappresenta rispetto alle base  $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$  è  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

a