Prima prova in itinere di Geometria (Corso di laurea in Fisica, Canali A-C e D-O)
Prof. Barucci e Piccinni
29 novembre 2011

a. Scrivere subito canale, cognome e nome.
b. Utilizzare questi fogli per le risposte. I fogli protocollo distribuiti a parte sono invece per eventuali riflessioni o calcoli, e non vanno consegnati.
c. Durante la prova non si possono consultare testi e appunti né usare fogli diversi da quelli distribuiti.
d. Durante la prova non è consentito uscire dall'aula.

Tempo a disposizione: 2 ore

Canale............................**Cognome**..**Nome**..

1. Siano $\vec{v}_1 = (1,2,0),\ \vec{v}_2 = (2,1,0),\ \vec{v}_3 = (0,1,2),\ \vec{v}_4 = (0,2,1) \in \mathbb{R}^3$. Stabilire quali tra le seguenti affermazioni sono vere (eventualmente anche più risposte):

   $\boxed{1}$ $\vec{v}_1,\ \vec{v}_2,\ \vec{v}_3,\ \vec{v}_4$ sono linearmente indipendenti.

   $\boxed{\cancel{2}}$ $\vec{v}_1,\ \vec{v}_2,\ \vec{v}_3,\ \vec{v}_4$ generano $\mathbb{R}^3$.

   $\boxed{3}$ $\vec{v}_1,\ \vec{v}_2,\ \vec{v}_3,\ \vec{v}_4$ sono una base di $\mathbb{R}^3$.

   $\boxed{4}$ Nessuna delle precedenti.

   L'unica affermazione esatta è quella segnata (numero 2), infatti la matrice le cui colonne sono i vettori dati ha rango 3.

2. Si consideri il sistema lineare a coefficienti reali:

$$\begin{cases} kx & -y & +z & =0 \\ x & -ky & +z & =0 \\ x & -y & +kz & =0 \end{cases}$$

   Stabilire quali tra le seguenti affermazioni sono vere (eventualmente anche più risposte):

   $\boxed{1}$ Il sistema ha solo la soluzione nulla per ogni k.

   $\boxed{2}$ Le soluzioni del sistema sono un sottospazio vettoriale $W \subset \mathbb{R}^3$ e la dimensione di W non dipende da k.

   $\boxed{\cancel{3}}$ Le soluzioni del sistema sono un sottospazio vettoriale $W \subset \mathbb{R}^3$ e la dimensione di W dipende da k.

   $\boxed{4}$ Nessuna delle precedenti.

   L'unica affermazione esatta è quella segnata, infatti per $k \neq 1$ il sistema ha solo la soluzione nulla, ma per $k = 1$ le soluzioni sono un sottospazio di dimensione 2.

3. Sia $V = \{p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4; a_i \in \mathbb{R}\}$ lo spazio vettoriale dei polinomi di grado ≤ 4 a coefficienti reali. Siano

$$U = \{p(x) \in V \text{ con } a_4 = 1\}, \qquad W = \{p(x) \in V \text{ con } a_0 = 0\}.$$

   Stabilire quali tra le seguenti affermazioni sono vere (eventualmente anche più risposte):

   $\boxed{1}$ U è un sottospazio vettoriale di V.

   $\boxed{\cancel{2}}$ W è un sottospazio vettoriale di V.

   $\boxed{3}$ $U \cap W$ è un sottospazio vettoriale di V.

   $\boxed{4}$ Nessuna delle precedenti.

   L'unica affermazione esatta è quella segnata, infatti U e $U \cap W$ non sono chiusi rispetto alla somma.

4. Sia $V = M_3(\mathbb{R})$ lo spazio vettoriale delle matrici quadrate di ordine 3 ad elementi reali. Sia

$$U = \left\{ A \in M_3(\mathbb{R}) \text{ tali che } A + A^t = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Stabilire quali tra le seguenti affermazioni sono vere (eventualmente anche più risposte):

$\boxed{1}$ U è un sottospazio vettoriale di V.

$\boxed{2}$ U è un sottospazio vettoriale di V e coincide con il sottospazio delle matrici simmetriche.

$\boxed{3}$ U è un sottospazio vettoriale di V e coincide con il sottospazio delle matrici antisimmetriche.

$\boxed{\cancel{4}}$ Nessuna delle precedenti.

L'unica affermazione esatta è quella segnata, infatti U non è un sottospazio vettoriale di $M_3(\mathbb{R})$.

5. Si consideri l'equazione $z^3 = i$, $z \in \mathbb{C}$. Stabilire quale tra le seguenti affermazioni è vera:

$\boxed{1}$ Le soluzioni sono $z_1 = i;\ z_2, z_3 = \frac{1}{3} \pm \frac{i}{3}$

$\boxed{\cancel{2}}$ Le soluzioni sono $z_1 = -i;\ z_2, z_3 = \pm\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$

$\boxed{3}$ Le soluzioni sono $z_1 = -i;\ z_2, z_3 = \frac{\sqrt{3}}{2} \pm \frac{i}{2}$

$\boxed{4}$ Nessuna delle precedenti.

6. Sia $V = \{p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2; a_i \in \mathbb{R}\}$ lo spazio vettoriale dei polinomi di grado ≤ 2 a coefficienti reali, e si consideri la sua base $\mathbb{E} = \{p_1(x) = 1 + x, p_2(x) = 1 + x^2, p_3(x) = x + x^2\}$. Dire quali sono le coordinate del polinomio $1 + x + x^2$ in tale base:

$\boxed{1}$ $(1, 1, 1)$.

$\boxed{\cancel{2}}$ $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

$\boxed{3}$ $(2, 2, 2)$.

$\boxed{4}$ Nessuna delle precedenti.

Infatti $1 + x + x^2 = \frac{1}{2}(1 + x) + \frac{1}{2}(1 + x^2) + \frac{1}{2}(x + x^2)$.

7. Sia $V = M_3(\mathbb{R})$ lo spazio vettoriale delle matrici quadrate di ordine 3 ad elementi reali. Sia

$$T : M_3(\mathbb{R}) \longrightarrow M_3(\mathbb{R})$$

l'applicazione lineare definita da

$$T(A) = B = (b_{ij})$$

dove per ogni $j = 1, 2, 3$ si definisce $b_{ij} = a_{i1} + a_{i2} + a_{i3}$ = somma degli elementi della i-esima riga di A. Stabilire quali tra le seguenti affermazioni è vera:

$\boxed{1}$ il nucleo di T ha dimensione 3 e l'immagine ha dimensione 6

$\boxed{\cancel{2}}$ il nucleo di T ha dimensione 6 e l'immagine ha dimensione 3

$\boxed{3}$ il nucleo di T ha dimensione 3 e l'immagine ha dimensione 3

$\boxed{4}$ il nucleo di T ha dimensione 6 e l'immagine ha dimensione 6

$\boxed{5}$ Nessuna delle precedenti.

Infatti dalla definizione di T, abbiamo che $b_{11} = b_{12} = b_{13} = a_{11} + a_{12} + a_{13}$, $b_{21} = b_{22} = b_{23} = a_{21} + a_{22} + a_{23}$, $b_{31} = b_{32} = b_{33} = a_{31} + a_{32} + a_{33}$. Quindi Ker$T$ è l'insieme delle matrici $A \in M_3(\mathbb{R})$ tali che

$$\begin{cases} a_{11} & +a_{12} & +a_{13} & = 0 \\ a_{21} & +a_{22} & +a_{23} & = 0 \\ a_{31} & +a_{32} & +a_{33} & = 0 \end{cases}$$

Si tratta di risolvere un sistema lineare di tre equazioni in nove incognite la cui matrice dei coefficienti è

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

il cui rango è 3. Quindi dimKer$T = 9 - 3 = 6$ e dimIm$T = 3$.

8. Siano $\vec{v}_1 = (1, 0, 0, 1)$, $\vec{v}_2 = (-1, 1, 0, 2)$, $\vec{v}_3 = (-2, 1, 0, 1)$, $\vec{v}_4 = (0, 0, 1, 1) \in \mathbb{R}^4$. Siano inoltre $U = \text{Span}(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$ e $W = \text{Span}(\vec{v}_3, \vec{v}_4)$. Rispondere nei riquadri alle seguenti domande:

   Estrarre da $\{\vec{v}_1,\ \vec{v}_2,\ \vec{v}_3,\ \vec{v}_4\}$ una base per $\text{Span}(\vec{v}_1,\ \vec{v}_2,\ \vec{v}_3,\ \vec{v}_4)$: $\boxed{\left| v_1,\ v_2,\ v_4 \right|}$

   Determinare $\dim(U + W) = \boxed{\left| \ 3 \ \right|}$

   Determinare $\dim(U \cap W) = \boxed{\left| \ 1 \ \right|}$

9. Sia $T : V \to W$ un'applicazione lineare. Stabilire quali tra le seguenti affermazioni sono vere (eventualmente anche più risposte):

   $\boxed{\cancel{1}}$ dim Im$T \leq$ dim$W$

   $\boxed{\cancel{2}}$ dim Im$T \leq$ dim$V$

   $\boxed{3}$ dim Ker$T \leq$ dim$W$

   $\boxed{\cancel{4}}$ dim Ker$T \leq$ dim$V$

   La n.1 è vera perché Im T è un sottoinsieme di W. Le n. 2 e 4 anche sono vere per il teorema della dimensione (dim V= dim Ker$T$+ dim ImT). La n. 3 invece non è sempre vera (ad esempio può essere W lo spazio nullo e Ker $T \neq 0$).

10. Stabilire se tra i seguenti sottospazi affini di $\mathbb{R}^3$ ce ne sono di coincidenti e in caso affermativo collegare con una freccia doppia i rispettivi riquadri:

    $\boxed{1}$ L_1 di equazioni parametriche $\begin{cases} x = t \\ y = -t \\ z = 2t \end{cases}$

    $\boxed{2}$ L_2 di equazioni parametriche $\begin{cases} x = t \\ y = -t + 2s \\ z = 2t + s \end{cases}$

    $\boxed{3}$ L_3 di equazioni cartesiane $\begin{cases} x = 0 \\ y - 2z = 0 \end{cases}$

    $\boxed{4}$ L_4 di equazioni cartesiane $5x + y - 2z = 0$

    $\boxed{5}$ L_5 di equazioni cartesiane $5x + y - 2z + 1 = 0$

    I sottospazi affini uguali sono L_2 e L_4 (si tratta di un piano).

11. Sia $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$, sia $A\vec{x} = \vec{b}$ un sistema lineare in incognite $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix}$ e termini noti $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ b_m \end{pmatrix}$, e sia $A\vec{x} = \vec{0}$ il sistema lineare omogeneo associato. Dire quali tra le seguenti eventualità possono effettivamente presentarsi (eventualmente anche più risposte):

$\boxed{\cancel{1}}$ Il sistema $A\vec{x} = \vec{b}$ non ammette soluzioni ma l'omogeneo associato $A\vec{x} = \vec{0}$ ne ammette infinite.

$\boxed{2}$ Il sistema $A\vec{x} = \vec{b}$ ammette una sola soluzione ma l'omogeneo associato $A\vec{x} = \vec{0}$ ne ammette infinite.

$\boxed{3}$ Il sistema $A\vec{x} = \vec{b}$ ammette infinite soluzioni ma l'omogeneo associato $A\vec{x} = \vec{0}$ ammette solo la soluzione nulla.

$\boxed{\cancel{4}}$ Entrambi i sistemi $A\vec{x} = \vec{b}$ e $A\vec{x} = \vec{0}$ ammettono una sola soluzione

Le uniche affermazioni esatte sono la n. 1 e la n. 4. Per esempio il sistema

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ z = 2 \\ z = 3 \end{cases}$$

non ammette soluzioni, ma l'omogeneo associato ne ammette infinite, quindi verifica la 1. Un sistema quadrato con matrice A non singolare verifica la n. 4. Le n. 2 e 3 sono false per il teorema di struttura.

12. Sia $V = M_3(\mathbb{R})$ lo spazio vettoriale delle matrici quadrate di ordine 3 ad elementi reali. Sia

$$T : M_3(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$$

l'applicazione definita da

$$T(A) = \text{somma di tutti i suoi elementi } = a_{11} + a_{12} + \cdots + a_{33}.$$

Stabilire quali tra le seguenti affermazioni sono vere (eventualmente anche più risposte):

$\boxed{1}$ T è un'applicazione lineare né iniettiva né suriettiva

$\boxed{2}$ T è un 'applicazione lineare iniettiva

$\boxed{\cancel{3}}$ T è un 'applicazione lineare suriettiva

$\boxed{4}$ T non è un 'applicazione lineare

13. Trovare tra le seguenti matrici quelle che sono l'una l'inversa dell'altra (e unire con una freccia doppia i rispettivi riquadri):

$$\boxed{1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad \boxed{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \quad \boxed{3} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

La seconda e la terza matrice sono una l'inversa dell'altra, come si può verificare calcolando il loro prodotto righe per colonne.

14. Sia $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{pmatrix}$, con $a, b, c \in \mathbb{R}^* = \mathbb{R} - 0$. Stabilire quali tra le seguenti affermazioni sono vere (anche più risposte):

$\boxed{\cancel{1}}$ esistono scelte di $a, b, c \in \mathbb{R}^*$ tali che il rango di A è 1

$\boxed{\cancel{2}}$ esistono scelte di $a, b, c \in \mathbb{R}^*$ tali che il rango di A è 2

$\boxed{\cancel{3}}$ esistono scelte di $a, b, c \in \mathbb{R}^*$ tali che il rango di A è 3

Infatti la n. 1 si può realizzare ad esempio con $a = b = c = 1$, la n. 2 con $a = b = 1$ e $c = 2$, la n. 3 con $a = 1, b = 2, c = 3$

15. Sia $\mathbb{R}[x]$ lo spazio vettoriale dei polinomi a coefficienti reali, e sia $T : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x]$ l'applicazione definita da

$$T(p(x)) = xp(x).$$

Stabilire quali tra le seguenti affermazioni sono vere (anche più risposte):

$\boxed{\cancel{1}}$ T è lineare e iniettiva

$\boxed{2}$ T è lineare e suriettiva

$\boxed{3}$ T non è lineare ma è iniettiva

$\boxed{4}$ T non è lineare ma è suriettiva

$\boxed{5}$ Nessuna delle precedenti.

La verifica della linearità e della iniettività è facile. L'applicazione non è suriettiva perché l'immagine è data dai polinomi con termine noto nullo.