

Prima prova in itinere di Geometria (Corso di laurea in Fisica, Canali A-C e D-O)

Prof. Barucci e Piccinni

29 novembre 2011

- Scrivere subito canale, cognome e nome.
- Utilizzare questi fogli per le risposte. I fogli protocollo distribuiti a parte sono invece per eventuali riflessioni o calcoli, e non vanno consegnati.
- Durante la prova non si possono consultare testi e appunti né usare fogli diversi da quelli distribuiti.
- Durante la prova non è consentito uscire dall'aula.

Tempo a disposizione: 2 ore

Canale.....Cognome.....Nome.....

1. Siano $\vec{v}_1 = (1, 2, 0)$, $\vec{v}_2 = (2, 1, 0)$, $\vec{v}_3 = (0, 1, 2)$, $\vec{v}_4 = (0, 2, 1) \in \mathbb{R}^3$. Stabilire quali tra le seguenti affermazioni sono vere (eventualmente anche più risposte):

- $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4$ sono linearmente indipendenti.
- $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4$ generano \mathbb{R}^3 .
- $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4$ sono una base di \mathbb{R}^3 .
- Nessuna delle precedenti.

2. Si consideri il sistema lineare a coefficienti reali:

$$\begin{cases} kx & -y & +z & = 0 \\ x & -ky & +z & = 0 \\ x & -y & +kz & = 0 \end{cases}$$

Stabilire quali tra le seguenti affermazioni sono vere (eventualmente anche più risposte):

- Il sistema ha solo la soluzione nulla per ogni k .
 - Le soluzioni del sistema sono un sottospazio vettoriale $W \subset \mathbb{R}^3$ e la dimensione di W non dipende da k .
 - Le soluzioni del sistema sono un sottospazio vettoriale $W \subset \mathbb{R}^3$ e la dimensione di W dipende da k .
 - Nessuna delle precedenti.
3. Sia $V = \{p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4; a_i \in \mathbb{R}\}$ lo spazio vettoriale dei polinomi di grado ≤ 4 a coefficienti reali. Siano

$$U = \{p(x) \in V \text{ con } a_4 = 1\}, \quad W = \{p(x) \in V \text{ con } a_0 = 0\}.$$

Stabilire quali tra le seguenti affermazioni sono vere (eventualmente anche più risposte):

- U è un sottospazio vettoriale di V .
- W è un sottospazio vettoriale di V .
- $U \cap W$ è un sottospazio vettoriale di V .
- Nessuna delle precedenti.

4. Sia $V = M_3(\mathbb{R})$ lo spazio vettoriale delle matrici quadrate di ordine 3 ad elementi reali. Sia

$$U = \left\{ A \in M_3(\mathbb{R}) \text{ tali che } A + A^t = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Stabilire quali tra le seguenti affermazioni sono vere (eventualmente anche più risposte):

- 1 U è un sottospazio vettoriale di V .
- 2 U è un sottospazio vettoriale di V e coincide con il sottospazio delle matrici simmetriche.
- 3 U è un sottospazio vettoriale di V e coincide con il sottospazio delle matrici antisimmetriche.
- 4 Nessuna delle precedenti.

5. Si consideri l'equazione $z^3 = i$, $z \in \mathbb{C}$. Stabilire quale tra le seguenti affermazioni è vera:

- 1 Le soluzioni sono $z_1 = i$; $z_2, z_3 = \frac{1}{3} \pm \frac{i}{3}$
- 2 Le soluzioni sono $z_1 = -i$; $z_2, z_3 = \pm \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$
- 3 Le soluzioni sono $z_1 = -i$; $z_2, z_3 = \frac{\sqrt{3}}{2} \pm \frac{i}{2}$
- 4 Nessuna delle precedenti.

6. Sia $V = \{p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2; a_i \in \mathbb{R}\}$ lo spazio vettoriale dei polinomi di grado ≤ 2 a coefficienti reali, e si consideri la sua base $\mathbb{E} = \{p_1(x) = 1 + x, p_2(x) = 1 + x^2, p_3(x) = x + x^2\}$. Dire quali sono le coordinate del polinomio $1 + x + x^2$ in tale base:

- 1 $(1, 1, 1)$.
- 2 $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.
- 3 $(2, 2, 2)$.
- 4 Nessuna delle precedenti.

7. Sia $V = M_3(\mathbb{R})$ lo spazio vettoriale delle matrici quadrate di ordine 3 ad elementi reali. Sia

$$T : M_3(\mathbb{R}) \longrightarrow M_3(\mathbb{R})$$

l'applicazione lineare definita da

$$T(A) = B = (b_{ij})$$

dove per ogni $j = 1, 2, 3$ si definisce $b_{ij} = a_{i1} + a_{i2} + a_{i3}$ = somma degli elementi della i -esima riga di A . Stabilire quali tra le seguenti affermazioni è vera:

- 1 il nucleo di T ha dimensione 3 e l'immagine ha dimensione 6
- 2 il nucleo di T ha dimensione 6 e l'immagine ha dimensione 3
- 3 il nucleo di T ha dimensione 3 e l'immagine ha dimensione 3
- 4 il nucleo di T ha dimensione 6 e l'immagine ha dimensione 6
- 5 Nessuna delle precedenti.

8. Siano $\vec{v}_1 = (1, 0, 0, 1)$, $\vec{v}_2 = (-1, 1, 0, 2)$, $\vec{v}_3 = (-2, 1, 0, 1)$, $\vec{v}_4 = (0, 0, 1, 1) \in \mathbb{R}^4$. Siano inoltre $U = \text{Span}(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$ e $W = \text{Span}(\vec{v}_3, \vec{v}_4)$. Rispondere nei riquadri alle seguenti domande:

Estrarre da $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4\}$ una base per $\text{Span}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4)$:

Determinare $\dim(U + W) =$

Determinare $\dim(U \cap W) =$

9. Sia $T : V \rightarrow W$ un'applicazione lineare. Stabilire quali tra le seguenti affermazioni sono vere (eventualmente anche più risposte):

1 $\dim \text{Im}T \leq \dim W$

2 $\dim \text{Im}T \leq \dim V$

3 $\dim \text{Ker}T \leq \dim W$

4 $\dim \text{Ker}T \leq \dim V$

10. Stabilire se tra i seguenti sottospazi affini di \mathbb{R}^3 ce ne sono di coincidenti e in caso affermativo collegare con una freccia doppia i rispettivi riquadri:

1 L_1 di equazioni parametriche $\begin{cases} x = t \\ y = -t \\ z = 2t \end{cases}$

2 L_2 di equazioni parametriche $\begin{cases} x = t \\ y = -t + 2s \\ z = 2t + s \end{cases}$

3 L_3 di equazioni cartesiane $\begin{cases} x = 0 \\ y - 2z = 0 \end{cases}$

4 L_4 di equazioni cartesiane $5x + y - 2z = 0$

5 L_5 di equazioni cartesiane $5x + y - 2z + 1 = 0$

11. Sia $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$, sia $A\vec{x} = \vec{b}$ un sistema lineare in incognite $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ e termini noti $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$, e sia $A\vec{x} = \vec{0}$

il sistema lineare omogeneo associato. Dire quali tra le seguenti eventualità possono effettivamente presentarsi (eventualmente anche più risposte):

1 Il sistema $A\vec{x} = \vec{b}$ non ammette soluzioni ma l'omogeneo associato $A\vec{x} = \vec{0}$ ne ammette infinite.

2 Il sistema $A\vec{x} = \vec{b}$ ammette una sola soluzione ma l'omogeneo associato $A\vec{x} = \vec{0}$ ne ammette infinite.

3 Il sistema $A\vec{x} = \vec{b}$ ammette infinite soluzioni ma l'omogeneo associato $A\vec{x} = \vec{0}$ ammette solo la soluzione nulla.

4 Entrambi i sistemi $A\vec{x} = \vec{b}$ e $A\vec{x} = \vec{0}$ ammettono una sola soluzione

12. Sia $V = M_3(\mathbb{R})$ lo spazio vettoriale delle matrici quadrate di ordine 3 ad elementi reali. Sia

$$T : M_3(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$$

l'applicazione definita da

$$T(A) = \text{somma di tutti i suoi elementi} = a_{11} + a_{12} + \cdots + a_{33}.$$

Stabilire quali tra le seguenti affermazioni sono vere (eventualmente anche più risposte):

- 1 T è un'applicazione lineare né iniettiva né suriettiva
- 2 T è un'applicazione lineare iniettiva
- 3 T è un'applicazione lineare suriettiva
- 4 T non è un'applicazione lineare

13. Trovare tra le seguenti matrici quelle che sono l'una l'inversa dell'altra (e unire con una freccia doppia i rispettivi riquadri):

$$\boxed{1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad \boxed{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}, \quad \boxed{3} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

14. Sia $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{pmatrix}$, con $a, b, c \in \mathbb{R}^* = \mathbb{R} - 0$. Stabilire quali tra le seguenti affermazioni sono vere (anche più risposte):

- 1 esistono scelte di $a, b, c \in \mathbb{R}^*$ tali che il rango di A è 1
- 2 esistono scelte di $a, b, c \in \mathbb{R}^*$ tali che il rango di A è 2
- 3 esistono scelte di $a, b, c \in \mathbb{R}^*$ tali che il rango di A è 3

15. Sia $\mathbb{R}[x]$ lo spazio vettoriale dei polinomi a coefficienti reali, e sia $T : \mathbb{R}[x] \rightarrow \mathbb{R}[x]$ l'applicazione definita da

$$T(p(x)) = xp(x).$$

Stabilire quali tra le seguenti affermazioni sono vere (anche più risposte):

- 1 T è lineare e iniettiva
- 2 T è lineare e suriettiva
- 3 T non è lineare ma è iniettiva
- 4 T non è lineare ma è suriettiva
- 5 Nessuna delle precedenti.

a