Geometria (Corso di laurea in Fisica, Canali A-C e D-O)
Prof. Barucci e Piccinni
9 luglio 2012

a. Scrivere subito canale, cognome e nome.
b. Utilizzare questi fogli per le risposte. I fogli protocollo distribuiti a parte sono invece per eventuali riflessioni o calcoli, e non vanno consegnati.
c. Durante la prova non si possono consultare testi e appunti né usare fogli diversi da quelli distribuiti.
d. Durante la prova non è consentito uscire dall'aula.

Tempo a disposizione: 2 ore

Canale............................**Cognome**...**Nome**..

1. Sia $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'endomorfismo tale che $T(x, y, z) = (-2x + y + z, x - 2y + z, x + y - 2z)$. Stabilire quali tra le seguenti affermazioni sono vere (eventualmente anche più risposte)

   $\boxed{1}$ T è rappresentato rispetto alla base canonica da una matrice diagonale

   $\boxed{\bowtie 2}$ T è diagonalizzabile

   $\boxed{\bowtie 3}$ per ogni autovalore, la molteplicità algebrica coincide con la molteplicità geometrica

   $\boxed{4}$ T ha tre autovalori distinti

   $\boxed{\bowtie 5}$ Ker T è un autospazio di T

   Infatti c'è l'autovalore 0, di molteplicità algebrica e geometrica uno e l'autovalore -3 di molteplicità algebrica e geometrica due.

2. Sia r la retta di $\mathbb{R}^3$ di equazioni

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ 2x - y = 0 \end{cases}$$

   Stabilire quali tra le seguenti affermazioni sono vere (eventualmente anche più risposte)

   $\boxed{\bowtie 1}$ Esiste un unico piano contenente la retta r e il punto $P = (3, 4, 0)$ ed ha equazione $4x - 3y = 0$

   $\boxed{2}$ Non esiste alcun piano contenente la retta r e il punto $P = (3, 4, 0)$

   $\boxed{3}$ Esistono infiniti piani contenenti la retta r e il punto $P = (3, 4, 0)$

   $\boxed{\bowtie 4}$ Esistono infiniti piani contenenti la retta r e il punto $Q = (0, 0, -2)$

   $\boxed{5}$ Esiste un unico piano contenente la retta r e il punto $Q = (0, 0, -2)$ ed ha equazione $x + 2y = 0$

   Infatti la retta è l'asse z, il punto P non appartiene a questa retta, mentre il punto Q vi appartiene.

3. Siano $\vec{v}_1 = (0, 1, 1, 0)$, $\vec{v}_2 = (1, 1, 1, 0)$, $\vec{v}_3 = (0, 1, 0, 0)$, $\vec{v}_4 = (1, 0, 1, 0) \in \mathbb{R}^4$. Siano inoltre $U = \mathrm{Span}(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$ e $W = \mathrm{Span}(\vec{v}_3, \vec{v}_4)$. Rispondere nei riquadri alle seguenti domande:

   Estrarre da $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4\}$ una base per $\mathrm{Span}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4)$: $\boxed{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3}$

   Determinare $\dim(U + W) = \boxed{3}$

   Determinare $\dim(U \cap W) = \boxed{1}$

4. Sia $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ (una matrice con m righe ed n colonne), e sia S una sua riduzione a scala. Stabilire quali tra le seguenti affermazioni sono vere (eventualmente anche più risposte)

$\boxed{\bowtie 1}$ Ker $A =$ Ker S

$\boxed{\bowtie 2}$ dim Ker $A =$ dim Ker S

$\boxed{3}$ Im $A =$ Im S

$\boxed{\bowtie 4}$ dim Im $A =$ dim Im S

$\boxed{5}$ Im A è un sottospazio di $\mathbb{R}^n e$ Ker A è un sottospazio di $\mathbb{R}^m$

$\boxed{\bowtie 6}$ Im A è un sottospazio di $\mathbb{R}^m e$ Ker A è un sottospazio di $\mathbb{R}^n$

5. Sia $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la rotazione di un angolo π intorno all'asse x. Stabilire quali tra le seguenti affermazioni sono vere (eventualmente anche più risposte):

$\boxed{1}$ T non è un endomorfismo

$\boxed{2}$ T è un endomorfismo ma non è diagonalizzabile

$\boxed{\bowtie 3}$ T è un endomorfismo diagonalizzabile

$\boxed{\bowtie 4}$ esiste una base di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori di T

$\boxed{5}$ l'unico autovalore di T è 1

Cf. Esempio 13.2 nel testo consigliato.

6. Sia $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ l'applicazione che associa a ogni numero complesso $a + ib$ il suo coniugato $a - ib$. Stabilire quali tra le seguenti affermazioni sono vere (eventualmente anche più risposte):

$\boxed{1}$ f è un'applicazione iniettiva ma non suriettiva

$\boxed{2}$ f è un'applicazione suriettiva ma non iniettiva

$\boxed{\bowtie 3}$ f è un'applicazione biiettiva

$\boxed{4}$ f è un'applicazione lineare di $\mathbb{C}$ in $\mathbb{C}$ come spazio vettoriale su se stesso

$\boxed{\bowtie 5}$ f è un'applicazione lineare di $\mathbb{C}$ in $\mathbb{C}$ come spazio vettoriale su $\mathbb{R}$

Osserviamo che f NON è un'applicazione lineare di $\mathbb{C}$ in $\mathbb{C}$ come spazio vettoriale su se stesso: se $a+ib$ e $c+id$ sono due numeri complessi, allora

$$T((a + ib)(c + id)) \neq (a + ib)T(c + id)$$

7. Sia $T : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ l'applicazione lineare definita dalla formula:

$$T(A) = (A \cdot A^t),$$

essendo $M_2(\mathbb{R})$ lo spazio vettoriale delle matrici reali 2×2, A^t la trasposta di A ed essendo $\cdot$ il prodotto righe per colonne. Stabilire quali tra le seguenti affermazioni sono vere (anche più risposte):

$\boxed{1}$ T è lineare e il nucleo di T è costituito dalle matrici simmetriche

$\boxed{2}$ T è lineare e il nucleo di T è costituito dalle matrici antisimmetriche

$\boxed{3}$ T non è lineare ma è iniettiva

$\boxed{4}$ T non è lineare ma è suriettiva

$\boxed{\bowtie 5}$ Nessuna delle precedenti.

Se $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, allora $A \cdot A^t = \begin{pmatrix} a^2+b^2 & ac+bd \\ ac+bd & c^2+d^2 \end{pmatrix}$. E' quindi facile vedere che non è un'applicazione lineare. Inoltre non è iniettiva, perché $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} b & a \\ d & c \end{pmatrix}$ hanno la stessa immagine e non è suriettiva perché nell'immagine ci sono soltanto matrici simmetriche.

8. Si considerino nello spazio $\mathbb{R}^3$ i seguenti quattro vettori (necessariamente linearmente dipendenti $\vec{v}_1 = (1,1,1), \vec{v}_2 = (1,2,2), \vec{v}_3 = (0,-1,1), \vec{v}_4 = (3,1,1)$, Stabilire quali tra le seguenti affermazioni è vera:

$\boxed{1}$ ognuno tra i vettori $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4$ è combinazione lineare dei rimanenti

$\boxed{2}$ uno solo tra i vettori $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4$ è combinazione lineare dei rimanenti

$\boxed{3}$ due e non più di due tra i vettori $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4$ sono combinazioni lineari dei rimanenti

$\boxed{\bowtie 4}$ tre e non più di tre tra i vettori $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4$ sono combinazioni lineari dei rimanenti

I vettori $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_4$ sono complanari, infatti formano una matrice di rango 2 e ognuno di essi è combinazione lineare degli altri due. D'altra parte $\vec{v}_3$ non è complanare ai tre vettori sopra considerati e quindi non è combinazione lineare di essi.

9. Si considerino in $M_2(\mathbb{C})$ le seguenti matrici:

$$J_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad J_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

Stabilire quali tra le seguenti affermazioni sono vere (anche più risposte):

$\boxed{1}$ J_1, J_2, J_3 sono diagonalizzabili, ma hanno autovalori diversi

$\boxed{\bowtie 2}$ J_1, J_2, J_3 sono diagonalizzabili, e hanno gli stessi autovalori

$\boxed{3}$ J_1, J_2, J_3 non sono diagonalizzabili

$\boxed{\bowtie 4}$ J_1, J_2, J_3 sono matrici simili

Tutte e tre le matrici hanno due autovalori distinti, 1 e -1, sono quindi tutte simili a J_3, che è diagonale.

10. Si consideri il sistema lineare a coefficienti reali:

$$\begin{cases} -x+4y+2z+1 & = 0 \\ 2x+5y+4z-2 & = 0 \\ 4x-3y-1 & = 0 \end{cases}$$

e siano $\alpha, \alpha', \alpha"$ i tre piani di $\mathbb{R}^3$ rappresentati ordinatamente dalla prima, seconda e terza equazione.

Stabilire quale tra le seguenti affermazioni è vera:

$\boxed{1}$ α, α', α"sono paralleli

$\boxed{2}$ α, α', α"si intersecano in un punto

$\boxed{3}$ α, α', α"si intersecano in una retta, e appartengono quindi a uno stesso fascio

$\boxed{\bowtie 4}$ Nessuna delle precedenti.

Infatti il sistema non ha soluzioni, ma i tre piani non sono paralleli.