Corso di Geometria II, a. a. 2010-11

Foglio n. 3

1. Collegarsi al sito

http://www.dimensions-math.org

e vedere i capitoli 1, 2 e 3 del film (dimensioni 2,3 e 4). Prestare particolare attenzione alla proiezione stereografica.

2. Guardare, sul libro M. Manetti, Topologia, Ed. Springer, l'esercizio 5.15 a pag. 94. La formula di questo esercizio è certamente ottenuta guardando alla proiezione stereografica della circonferenza S^1 di centro l'origine e raggio 1 su uno dei due assi coordinati di $\mathbf{R}^2$. Quale scelta del punto di proiezione e dell'asse coordinato consente di scrivere la formula indicata?

3. Idem con l'esercizio 5.16 a pag. 94 di M. Manetti, Topologia, Ed. Springer. Qui la sfera S^2 è la sfera di centro l' origine e raggio 1 di $\mathbf{R}^3$. Si chiede ora di determinare la scelta del piano coordinato di $\mathbf{R}^3$ e il punto su S^2 tale che l'inversa della proiezione stereografica sia espressa dalla formula indicata.
par

4. Sia (X, d) uno spazio metrico e sia τ_d la topologia indotta dalla distanza d su X. Dimostrare che, considerando su $X \times X$ la topologia prodotto $\tau_d \times \tau_d$ e su $\mathbf{R}$ la topologia euclidea, l'applicazione

$$d : X \times X \to \mathbf{R}$$

è continua.

5. Sia $p : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ la prima proiezione canonica: $p(x, y) = x$. Siano $\mathcal{E}$ e $\mathcal{E}^2$ le topologie euclidee di $\mathbf{R}$ e di $\mathbf{R}^2$. Sia $p^{-1}(\mathcal{E})$ la topologia immagine inversa di $\mathcal{E}$ rispetto a p (i cui aperti sono i sottoinsiemi $p^{-1}(A) \subset \mathbf{R}^2$ con A aperto in $\mathcal{E}$).

i) Indicare due topologie su $\mathbf{R}$ di cui $p^{-1}(\mathcal{E})$ è la topologia prodotto.

ii) Verificare che $(\mathbf{R}^2, p^{-1}(\mathcal{E}))$ non è metrizzabile. [Si suggerisce di determinare una successione che ammette più punti di convergenza o in alternativa di verificare che lo spazio non è di Hausdorff].

6. In $(\mathbf{R}^2, \mathcal{E}^2)$ è data la relazione $(x, y) \sim (x', y') \iff x - x' = y - y'$.

i) Verificare che $\sim$ è una relazione di equivalenza e descrivere le classi di equivalenza.

ii) Denotata con q la proiezione sullo spazio quoziente, descrivere gli aperti saturi.

iii) Sia $f : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}$ la funzione $f(x, y) = x - y$, ove $\mathbf{R}$ è dotato della topologia euclidea. Verificare che f è continua. C' è qualche relazione tra f e la q del punto ii)?