Corso di Geometria II, a. a. 2010-11

Foglio n. 4

1. Dimostrare che $\mathbf{R}$ non è compatto nella topologia euclidea, indicando un suo ricoprimento aperto che non ammette sottoricoprimenti finiti. Ripetere analoga dimostrazione per gli intervalli del tipo (a, b), $[a, b)$, $(a, b]$, $(a, +\infty)$, $[a, +\infty)$, $(-\infty, b)$, $(-\infty, b]$.

2. In uno spazio metrico (X, d) sia dato un sottoinsieme non vuoto B; si definisce "distanza" di un punto $x \in X$ da B il numero

$$d(x, B) = \inf_{y \in B} \{d(x, y)\}.$$

i) Dimostrare che al variare di x in X, la funzione

$$d(x, B) : X \to \mathbf{R}$$

è continua, sempre ≥ 0, e si annulla se e solo se $x \in \overline{B}$.

ii) In (X, d) siano dati due sottoinsiem non vuoti B e C; si definisce loro "distanza" il numero

$$d(B, C) = \inf_{y \in B; z \in C} \{d(y, z)\}.$$

Tenendo conto di quanto detto in i), dimostrare che $d(B, C)$ è sempre ≥ 0; mostrare poi che può essere $d(B, C) = 0$ anche se B e C sono due chiusi disgiunti, e che invece è sempre $d(b, C) > 0$ se B e C sono due chiusi disgiunti di cui uno compatto.

3. Si considerino in $\mathbf{R}^2$ i sottoinsiemi

$$X_k = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1,\ kx + ky - 1 = 0\},$$

essendo $k \in \mathbf{N}$, e l'insieme

$$X = \bigcup_{k \in \mathbf{N}} X_k.$$

i) Stabilire se i sottoinsiemi X_k sono chiusi in $\mathbf{R}^2$ e se sono compatti.

ii) Stabilire se X è chiuso e in caso negativo determinarne la chiusura $\overline{X}$.

iii) Stabilire se X (o $\overline{X}$) è compatto.

4. Si considerino i $\mathbf{R}^2$ le circonferenze:

$$C_n : \big(x - \frac{1}{n}\big)^2 + y^2 = \frac{1}{n^2},$$

il punto $p_n = (\frac{2}{n}, 0) \in C_n$ e la retta r_n tangente a C_n in p_n.

i) Stabilire se gli insiemi

$$C = \bigcup_{n \in \mathbf{N}} C_n, \qquad r = \bigcup_{n \in \mathbf{N}} r_n$$

sono chiusi in $\mathbf{R}^2$. In caso negativo determinarne le chiusure $\overline{C}$ e $\overline{r}$.

ii) Posto $X = C \cap r$, determinare la chiusura $\overline{X}$ di X. Stabilire se le topologie euclidee indotte su X e su $\overline{X}$ coincidono con le rispettive topologie discrete.

iii) Quali tra gli insiemi $C, r, X, \overline{X}$ sono compatti?

5. *(Compattificazione di Alexandroff).* Sia X uno spazio topologico non compatto e sia

$$X^* = X \cup \{\infty\}.$$

i) Dimostrare che la famiglia

$$\mathcal{T} = \{A | A \text{ aperto in X}\} \cup \{\text{X}^* - \text{K} | \text{K chiuso e compatto in X}\}$$

è una topologia su X^*.

ii) Dimostrare che $(X^*, \mathcal{T})$ è compatto.

iii) Sia $i : X \to X^*$ l'inclusione. Dimostrare che $i(X)$ è denso in X^*, ovvero che $\overline{i(X)} = X^*$.