

Primo appello di Geometria per Fisica, a.a. 2012-13, lettere Cf-K (Prof. P. Piccini)

30 gennaio 2013

- Scrivere subito Matricola, cognome, nome e preferenza per orale al primo o secondo appello.
- Utilizzare questi fogli per le risposte. I fogli protocollo distribuiti a parte sono invece per eventuali riflessioni o calcoli, e non vanno consegnati.
- Durante la prova non si possono consultare testi e appunti né usare fogli diversi da quelli distribuiti.
- Durante la prova non è consentito uscire dall'aula.

Tempo a disposizione: 2 ore

| |
|--|
| Matricola.....Cognome.....Nome..... |
|--|

1. Una matrice $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ si dice **bilanciata per righe con peso** $h \in \mathbb{R}$ se per ogni sua riga $\vec{r}_i = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in})$ risulta: $a_{i1} + a_{i2} + \dots + a_{in} = h$, ($i = 1, \dots, n$). Siano

$$W_h = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \text{ bilanciate per righe con peso } h\}, \quad W = \bigcup_{h \in \mathbb{R}} W_h = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \text{ bilanciate per righe}\}.$$

Stabilire quali tra le seguenti affermazioni sono vere.

- | | |
|---|---|
| 1 | W è un sottospazio vettoriale di $M_n(\mathbb{R})$ |
| 2 | W_h è un sottospazio vettoriale di $M_n(\mathbb{R})$ per ogni $h \in \mathbb{R}$ |
| 3 | W_h è un sottospazio affine di $M_n(\mathbb{R})$ per ogni $h \in \mathbb{R}$ |
| 4 | W_h è un sottospazio vettoriale di $M_n(\mathbb{R})$ se e solo se $h = 0$ |
| 5 | Se $A \in M_n(\mathbb{R})$ è bilanciata per righe con peso $h = 0$, allora $\det A = 0$ |
| 6 | Se $A \in M_n(\mathbb{R})$ è bilanciata per righe per qualche peso $h \in \mathbb{R}$, allora $\det A = 0$ |
| 7 | Se $A \in M_n(\mathbb{R})$ è bilanciata per righe con peso h , allora A è anche bilanciata per colonne con lo stesso peso h |
| 8 | Nessuna delle precedenti |

2. Si consideri le tre equazioni a coefficienti in \mathbb{C} :

$$z^6 - 1 = 0, \quad z^{10} - 1 = 0, \quad z^{15} - 1 = 0.$$

Stabilire quali tra le seguenti affermazioni sono vere:

- | | |
|---|--|
| 1 | L'unica soluzione comune alle tre equazioni è 1 |
| 2 | Le uniche soluzioni comuni alla prima e seconda equazione sono 1 e -1 |
| 3 | Le uniche soluzioni comuni alla prima e terza equazione sono $1, -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$ |
| 4 | Vi sono cinque soluzioni comuni alla seconda e terza equazione |
| 5 | Nessuna delle precedenti. |

3. Si consideri nel piano euclideo \mathbb{R}^2 il "quadrato unitario", di vertici i punti $O = (0, 0), P_1 = (1, 0), P_2 = (0, 1), P_3 = (1, 1)$. Sia $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ una matrice **tale che $\det A = 1$** , e si consideri la trasformazione lineare $A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$. Denotiamo con $O' = A(O), P'_1 = A(P_1), P'_2 = A(P_2), P'_3 = A(P_3)$ i punti immagine mediante A risp. di O, P_1, P_2, P_3 . Stabilire quali tra le seguenti affermazioni sono vere (eventualmente anche più risposte):

- | | |
|---|---|
| 1 | O', P'_1, P'_2, P'_3 sono ancora vertici di un quadrato |
| 2 | O', P'_1, P'_2, P'_3 sono ancora vertici di un quadrato di area 1 |
| 3 | O', P'_1, P'_2, P'_3 sono vertici di un rettangolo |
| 4 | O', P'_1, P'_2, P'_3 sono vertici di un rettangolo di area 1 |
| 5 | O', P'_1, P'_2, P'_3 sono vertici di un rombo |
| 6 | O', P'_1, P'_2, P'_3 sono vertici di un rombo di area 1 |
| 7 | O', P'_1, P'_2, P'_3 sono vertici di un parallelogramma |
| 8 | O', P'_1, P'_2, P'_3 sono vertici di un parallelogramma di area 1 |
| 9 | Nessuna delle precedenti |

4. Si considerino nello spazio euclideo \mathbb{R}^3 i piani $\alpha_1 : x + y + z = 0$, $\alpha_2 : x + y - z = 0$ e $\alpha_3 : x - y + z = 0$, essendo (x, y, z) le coordinate cartesiane di \mathbb{R}^3 . Stabilire quali tra le seguenti affermazioni sono vere (eventualmente anche più risposte):

- 1 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ sono a due a due perpendicolari
- 2 le rette $r_1 : x = y = z, r_2 : x = y = -z, r_3 : x = -y = z$ sono parallele risp. ai piani $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$
- 3 le rette $r_1 : x = y = z, r_2 : x = y = -z, r_3 : x = -y = z$ sono perpendicolari risp. ai piani $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$
- 4 $\alpha_1 \cap \alpha_2 \cap \alpha_3$ è una retta passante per $O = (0, 0, 0)$
- 5 $\alpha_1 \cap \alpha_2 \cap \alpha_3$ è solo il punto $O = (0, 0, 0)$
- 6 Nessuna delle precedenti

5. Siano $A \in M_3(\mathbb{R}), B \in M_3(\mathbb{C})$, e supponiamo che A abbia tre autovalori reali distinti e che B abbia tre autovalori complessi distinti. Stabilire quali tra le seguenti affermazioni sono vere (anche più risposte):

- 1 A^2 ha tre autovalori distinti
- 2 B^2 ha tre autovalori distinti
- 3 A^3 ha tre autovalori distinti
- 4 B^3 ha tre autovalori distinti
- 5 A, A^2, A^3 sono diagonalizzabili su \mathbb{R}
- 6 B, B^2, B^3 sono diagonalizzabili su \mathbb{C}
- 7 Nessuna delle precedenti

6. Si consideri in \mathbb{R}^n il prodotto scalare canonico $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ definita sui vettori $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n), \vec{y} = (y_1, \dots, y_n)$ dalla formula $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$. Diciamo che la matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ **conserva l'ortogonalità** se vale l'implicazione

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = 0 \Rightarrow \langle A\vec{x}, A\vec{y} \rangle = 0, \quad \text{per ogni } \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n.$$

Stabilire quali tra le seguenti affermazioni sono corrette (eventualmente anche più risposte):

- 1 Se A conserva l'ortogonalità, allora è ortogonale: $A = A^t$
- 2 $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ conserva l'ortogonalità
- 3 $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ conserva l'ortogonalità
- 4 $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ conserva l'ortogonalità
- 5 Nessuna delle precedenti