Primo appello di Geometria per Fisica, a.a. 2012-13, lettere Cf-K (Prof. P. Piccinni)
30 gennaio 2013

1. Una matrice $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ si dice **bilanciata per righe con peso** $h \in \mathbb{R}$ se per ogni sua riga $\vec{r}_i = (a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in})$ risulta: $a_{i1} + a_{i2} + \cdots + a_{in} = h$, $(i = 1, \ldots, n)$. Siano

$$W_h = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \text{ bilanciate per righe con peso } h\}, \quad W = \bigcup_{h \in \mathbb{R}} W_h = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \text{ bilanciate per righe}\}.$$

Stabilire quali tra le seguenti affermazioni sono vere.

$\boxed{1}$ W è un sottospazio vettoriale di $M_n(\mathbb{R})$
$\boxed{2}$ W_h è un sottospazio vettoriale di $M_n(\mathbb{R})$ per ogni $h \in \mathbb{R}$
$\boxed{3}$ W_h è un sottospazio affine di $M_n(\mathbb{R})$ per ogni $h \in \mathbb{R}$
$\boxed{4}$ W_h è un sottospazio vettoriale di $M_n(\mathbb{R})$ se e solo se $h = 0$
$\boxed{5}$ Se $A \in M_n(\mathbb{R})$ è bilanciata per righe con peso $h = 0$, allora $\det A = 0$
$\boxed{6}$ Se $A \in M_n(\mathbb{R})$ è bilanciata per righe per qualche peso $h \in \mathbb{R}$, allora $\det A = 0$
$\boxed{7}$ Se $A \in M_n(\mathbb{R})$ è bilanciata per righe con peso h, allora A è anche bilanciata per colonne con lo stesso peso h
$\boxed{8}$ Nessuna delle precedenti

Le coordinate nello spazio vettoriale $M_n(\mathbb{R})$ sono, nella base canonica, gli elementi a_{ij} delle matrici. Dunque un sottonsieme di $M_n(\mathbb{R})$ è un sottospazio vettoriale se e solo se è rappresentato da un sistema di equazioni lineari omogenee negli a_{ij} . Similmente un sottonsieme di $M_n(\mathbb{R})$ è un sottospazio affine se e solo se è rappresentato da un sistema di equazioni lineari (non necessariamente omogenee) negli elementi a_{ij} . Ora, fissato $h \in \mathbb{R}$, le matrici in W_h sono caratterizzate dal sistema lineare $a_{i1} + a_{i2} + \cdots + a_{in} = h$, $(i = 1, \ldots, n)$, che è omogeneo se e solo se $h = 0$. Dunque le affermazioni 3 e 4 sono vere, mentre l' affermazione 2 è falsa. E' vera anche l'affermazione 1: le matrici in W sono caratterizzate dal sistema lineare omogeneo nelle a_{ij} ottenuto uguagliando tra loro le somme degli elementi di ogni riga. E' vera anche l'affermazione 5, mentre la 6 è falsa: se, e solo se, $h = 0$ le matrici in W_h hanno una colonna che coincide con il negativo della somma delle altre. Infine, la 7 è falsa, come si vede subito con semplicissimi controesempi, anche di matrici 2×2.

2. Si consideri le tre equazioni a coefficienti in $\mathbb{C}$:

$$z^6 - 1 = 0, \quad z^{10} - 1 = 0, \quad z^{15} - 1 = 0.$$

Stabilire quali tra le seguenti affermazioni sono vere:

$\boxed{1}$ L'unica soluzione comune alle tre equazioni è 1
$\boxed{2}$ Le uniche soluzioni comuni alla prima e seconda equazione sono 1 e -1
$\boxed{3}$ Le uniche soluzioni comuni alla prima e terza equazione sono $1, -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\boxed{4}$ Vi sono cinque soluzioni comuni alla seconda e terza equazione
$\boxed{5}$ Nessuna delle precedenti.

Le soluzioni delle tre equazioni sono date dai numeri complessi, di modulo 1, rappresentati nella circonferenza unitaria $S^1 \subset \mathbb{C}$, dai vertici risp. di un triangolo equilatero, di un decagono regolare, e di un pentadecagono regolare che abbiano tutti un vertice nel punto $1 \in S^1$. Da ciò, o se si preferisce dalla formula analitica delle radici n-esime dell'unità, segue che le affermazioni 1,2,3,4 sono tutte corrette.

3. Si consideri nel piano euclideo $\mathbb{R}^2$ il "quadrato unitario", di vertici i punti $O = (0,0), P_1 = (1,0), P_2 = (0,1), P_3 = (1,1)$. Sia $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ una matrice **tale che $\det \mathbf{A} = \mathbf{1}$**, e si consideri la trasformazione lineare $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Denotiamo con $O' = A(O), P_1' = A(P_1), P_2' = A(P_2), P_3' = A(P_3)$ i punti immagine mediante A

risp. di O, P_1, P_2, P_3. Stabilire quali tra le seguenti affermazioni sono vere (eventualmente anche più risposte):

$\boxed{1}$ O', P_1', P_2', P_3' sono ancora vertici di un quadrato
$\boxed{2}$ O', P_1', P_2', P_3' sono ancora vertici di un quadrato di area 1
$\boxed{3}$ O', P_1', P_2', P_3' sono vertici di un rettangolo
$\boxed{4}$ O', P_1', P_2', P_3' sono vertici di un rettangolo di area 1
$\boxed{5}$ O', P_1', P_2', P_3' sono vertici di un rombo
$\boxed{6}$ O', P_1', P_2', P_3' sono vertici di un rombo di area 1
$\boxed{7}$ O', P_1', P_2', P_3' sono vertici di un parallelogramma
$\boxed{8}$ O', P_1', P_2', P_3' sono vertici di un parallelogramma di area 1
$\boxed{9}$ Nessuna delle precedenti

I punti immagine sono $O' = (0,0)$, $P_1' = (a_{11}, a_{21})$, $P_3' = (a_{12}, a_{22})$, $P_3' = (a_{11} + a_{12}, a_{21} + a_{22})$, da cui è evidente il parallelismo tra i lati opposti del quadrilatero $O'P_1'P_2'P_3'$. La condizione $\det A = 1$ (che non implica che A sia ortogonale, e dunque il quadrilatero non è né un rettangolo, né un rombo, né un quadrato) implica che l'area del parallelogramma sia il modulo del prodotto vettoriale $\vec{O'P_1'} \wedge \vec{O'P_2'}$, e dalla formula analitica del prodotto vettoriale, tale modulo è $detA = 1$.

4. Si considerino nello spazio euclideo $\mathbb{R}^3$ i piani $\alpha_1 : x + y + z = 0$, $\alpha_2 : x + y - z = 0$ e $\alpha_3 : x - y + z = 0$, essendo (x, y, z) le coordinate cartesiane di $\mathbb{R}^3$. Stabilire quali tra le seguenti affermazioni sono vere (eventualmente anche più risposte):

$\boxed{1}$ $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ sono a due a due perpendicolari
$\boxed{2}$ le rette $r_1 : x = y = z, r_2 : x = y = -z, r_3 : x = -y = z$ sono parallele risp. ai piani $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$
$\boxed{3}$ le rette $r_1 : x = y = z, r_2 : x = y = -z, r_3 : x = -y = z$ sono perpendicolari risp. ai piani $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$
$\boxed{4}$ $\alpha_1 \cap \alpha_2 \cap \alpha_3$ è una retta passante per $O = (0, 0, 0)$
$\boxed{5}$ $\alpha_1 \cap \alpha_2 \cap \alpha_3$ è solo il punto $O = (0, 0, 0)$
$\boxed{6}$ Nessuna delle precedenti

I tre piani hanno parametri di giacitura risp. $(1, 1, 1), (1, 1, -1), (1, -1, 1)$ e pertanto non sono perpendicolari. Il sistema lineare omogeneo costituito dalle equazioni dei tre piani ha determinante non nullo. Ne segue che esso ammette solo la soluzione nulla, e dunque l'affermazione 5 è vera, mentre la 4 è falsa. Le rette r_1, r_2, r_3 sono date con equazioni ridotte, dunque i loro parametri direttori, leggibili dalle equazioni, sono risp. $(1, 1, 1), (1, 1, -1), (1, -1, 1)$, ovvero coincidono con i parametri di giacitura dei tre piani. Dunque l'affermazione 3 è vera e la 2 è falsa.

5. Siano $A \in M_3(\mathbb{R})$, $B \in M_3(\mathbb{C})$, e supponiamo che A abbia tre autovalori reali distinti e che B abbia tre autovalori complessi distinti. Stabilire quali tra le seguenti affermazioni sono vere (anche più risposte):

$\boxed{1}$ A^2 ha tre autovalori distinti
$\boxed{2}$ B^2 ha tre autovalori distinti
$\boxed{3}$ A^3 ha tre autovalori distinti
$\boxed{4}$ B^3 ha tre autovalori distinti
$\boxed{5}$ A, A^2, A^3 sono diagonalizzabili su $\mathbb{R}$
$\boxed{6}$ B, B^2, B^3 sono diagonalizzabili su $\mathbb{C}$
$\boxed{7}$ Nessuna delle precedenti

Poiché sia gli autovalori di A che quelli di B sono tutti distinti, A e B sono diagonalizzabili, risp. su $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$. Dunque esistono matrici invertibili $M \in M_3(\mathbb{R})$ e $N \in M_3(\mathbb{C})$ tali che $M^{-1}AM$ e $N^{-1}BN$ siano diagonali. Ne segue che anche $M^{-1}A^2M, M^{-1}A^3M$ e $N^{-1}B^2N, N^{-1}B^3N$ sono diagonali, ovvero le affermazioni 5 e 6 sono vere. Delle altre affermazioni è vera solo la 3: gli autovalori di A^2, B^2 sono infatti i quadrati di quelli di A, B, e quelli di A^3, B^3 sono i cubi di quelli di A, B. Solo nel caso reale, tre numeri distinti hanno i cubi distinti (funzione $f(x) = x^3$ invertibile!).

6. Si consideri in $\mathbb{R}^n$ il prodotto scalare canonico $< \, , \, >: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ definita sui vettori $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, $\vec{y} = (y_1, \ldots, y_n)$ dalla formula $< \vec{x}, \vec{y} >= x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n$. Diciamo che la matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ **conserva l'ortogonalità** se vale l'implicazione

$$< \vec{x}, \vec{y} >= 0 \Rightarrow < A\vec{x}, A\vec{y} >= 0, \qquad \text{per ogni } \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n.$$

Stabilire quali tra le seguenti affermazioni sono corrette (eventualmente anche più risposte):

$\boxed{1}$ Se A conserva l'ortogonalità, allora è ortogonale: $A = A^t$

$\boxed{2}$ Se A conserva l'ortogonalità, allora è invertibile ma non necessariamente ortogonale

$\boxed{3}$ $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ conserva l'ortogonalità

$\boxed{4}$ $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ conserva l'ortogonalità

$\boxed{5}$ $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ conserva l'ortogonalità

$\boxed{6}$ Nessuna delle precedenti

Il conservare l'ortogonalità, secondo la definizione data, non implica conservare il modulo dei vettori: p. es. le matrici delle affermazione 3 e 4 la conservano (ma non della 5). Dunque conservare l'ortogonalità non implica che la matrice sia ortogonale (l'affermazione 1 è falsa), ma implica che è invertibile (la 2 è vera).