

**Primo appello di Geometria (Corso di laurea in Fisica, Canali A-C e D-O)**

Prof. Barucci e Piccinni

1 febbraio 2012

- Scrivere subito canale, cognome e nome.
- Utilizzare questi fogli per le risposte. I fogli protocollo distribuiti a parte sono invece per eventuali riflessioni o calcoli, e non vanno consegnati.
- Durante la prova non si possono consultare testi e appunti né usare fogli diversi da quelli distribuiti.
- Durante la prova non è consentito uscire dall'aula.

*Tempo a disposizione: 2 ore*

Canale.....Cognome.....Nome.....
----------------------------------

1. Si consideri l'equazione  $z^2 + 2iz - 1 = 0$ , a coefficienti in  $\mathbb{C}$ . Stabilire quale tra le seguenti affermazioni è vera:

- Le soluzioni sono  $z_1 = i$ ;  $z_2 = -i$
- Le soluzioni sono  $z_1 = z_2 = i$
- Le soluzioni sono  $z_1 = z_2 = -i$
- Nessuna delle precedenti.

2. Siano  $A_1, A_2 \in M_n(\mathbb{R})$ . Stabilire quali tra le seguenti affermazioni sono vere (eventualmente anche più risposte)

- Se  $A_1$  e  $A_2$  sono simmetriche ( $A_1 = A_1^t, A_2 = A_2^t$ ), allora  $A_1 + A_2$  è simmetrica
- Se  $A_1$  e  $A_2$  sono antisimmetriche ( $A_1 = -A_1^t, A_2 = -A_2^t$ ), allora  $A_1 + A_2$  è antisimmetrica
- Se  $A_1$  e  $A_2$  sono simmetriche, allora il prodotto  $A_1 A_2$  è una matrice simmetrica
- Se  $A_1$  e  $A_2$  sono antisimmetriche, allora il prodotto  $A_1 A_2$  è una matrice antisimmetrica
- Nessuna delle precedenti

3. Si consideri nello spazio euclideo  $\mathbb{R}^3$  il piano  $\alpha : x + z + 1 = 0$ , essendo  $(x, y, z)$  le coordinate cartesiane di  $\mathbb{R}^3$ . Stabilire quali tra le seguenti affermazioni sono vere (eventualmente anche più risposte):

- $\alpha$  è parallelo al piano  $xz$  (contenente gli assi  $x$  e  $z$ )
- $\alpha$  è parallelo all'asse  $y$
- $\alpha$  è perpendicolare al piano  $xz$
- $\alpha$  è perpendicolare all'asse  $y$

4. Si considerino nello spazio  $\mathbb{R}^3$  la retta  $r$  di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = 5 - 5t \\ y = 13 + 24t \\ z = 0 \end{cases}$$

e il piano  $\alpha$  di equazione cartesiana  $3x + z = 5$ , stabilire quali tra le seguenti affermazioni sono vere (eventualmente anche più risposte):

1  $r$  e  $\alpha$  si intersecano in un punto.

2  $r$  e  $\alpha$  hanno intersezione vuota.

3  $r$  è contenuta nel piano  $\alpha$

4 Nessuna delle precedenti.

5. Si consideri in  $\mathbb{R}^4$  il sottospazio vettoriale  $U$  di equazioni  $x_1 + x_2 = 0$ ,  $x_2 = 0$ , nelle coordinate cartesiane  $(x_1, x_2, x_3, x_4)$  di  $\mathbb{R}^4$ . Sia  $U^\perp$  il sottospazio di  $\mathbb{R}^4$  formato dai vettori di  $\mathbb{R}^4$  ortogonali (nel prodotto scalare canonico) a tutti i vettori di  $U$ . Stabilire quali tra le seguenti affermazioni sono vere (eventualmente anche più risposte):

1  $\dim U^\perp = 2$

2  $(1, 0, 0, 0) \in U^\perp$

3  $U^\perp$  ha equazioni cartesiane  $x_3 + 2x_4 = 0$ ,  $x_3 - x_4 = 0$

4  $U^\perp$  ha equazioni cartesiane  $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$ ,  $x_2 + x_3 + x_4 = 0$

6. Sia  $V = M_2(\mathbb{R})$  lo spazio vettoriale delle matrici quadrate di ordine 2 ad elementi reali. Sia

$$T : M_2(\mathbb{R}) \longrightarrow M_2(\mathbb{R})$$

l'applicazione lineare definita da  $T(A) = A + A^t$ , somma di  $A$  con la sua trasposta. Qual'è la matrice che rappresenta  $T$  nella base canonica  $E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ?

1  $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

2  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

3  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

4  $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

5 Nessuna delle precedenti

7. Si considerino le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Stabilire quali tra le seguenti affermazioni sono vere (eventualmente anche più risposte):

- 1  $AB = BA$
- 2  $B = A^{-1}$
- 3 Gli autovalori di  $A$  e di  $B$  sono gli stessi
- 4 Nessuna delle precedenti

8. Sia  $A_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ , con  $\theta \in [0, 2\pi)$ . Stabilire quali tra le seguenti affermazioni sono vere (anche più risposte):

- 1 per qualche  $\theta \in [0, 2\pi)$  esiste un vettore  $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2, \vec{x} \neq \vec{0}$ , con  $A_\theta \vec{x} = \vec{x}$
- 2 per qualche  $\theta \in [0, 2\pi)$  esiste un vettore  $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2, \vec{x} \neq \vec{0}$ , con  $A_\theta \vec{x} = -\vec{x}$
- 3 per qualche  $\theta \in [0, 2\pi)$  esiste un vettore  $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2, \vec{x} \neq \vec{0}$ , con  $A_\theta \vec{x} = \vec{0}$
- 4 Nessuna delle precedenti.

9. Sia

$$V = \mathbb{R}_{\leq 4}[x] = \{P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4\}$$

lo spazio vettoriale dei polinomi di grado  $\leq 4$  a coefficienti reali, e sia

$$U = \mathbb{R}_{\leq 2}[x] = \{Q(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2\}$$

il sottospazio vettoriale costituito dai polinomi di grado  $\leq 2$ . Stabilire quali tra i seguenti sottoinsiemi  $W$  di  $V$  costituiscono un sottospazio vettoriale tale che  $V = U \oplus W$  (eventualmente anche più risposte):

- 1  $W = \{P(x) \in V \text{ tali che } a_0 = a_1 = a_2 = 0\}$
- 2  $W = \{P(x) \in V \text{ tali che } P''(x) = 0\}$  essendo  $P''(x)$  la derivata seconda di  $P(x)$
- 3  $W = \{P(x) \in V \text{ tali che } \langle P(x), Q(x) \rangle = 0 \text{ per ogni } Q(x) \in U\}$ ,  
essendo  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  il prodotto scalare canonico nello spazio vettoriale numerico  $\mathbb{R}^5 \cong V$
- 4 Nessuno dei precedenti

10. Sia  $V$  uno spazio vettoriale reale di dimensione 3,  $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$  una base di  $V$  e  $T_h : V \rightarrow V$  l'endomorfismo di  $V$  definito dalle relazioni:  $T(\mathbf{v}_1) = h\mathbf{v}_1 + (h-1)\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3$ ,  $T(\mathbf{v}_2) = \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3$ ,  $T(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3) = h\mathbf{v}_1 + h\mathbf{v}_2 + (h-1)\mathbf{v}_3$ , dove  $h \in \mathbb{R}$ . Stabilire quale tra le seguenti affermazioni è vera.

- 1  $T_h$  è diagonalizzabile per ogni valore reale di  $h$
- 2  $T_h$  non è mai diagonalizzabile
- 3  $T_h$  è diagonalizzabile soltanto per  $h \neq 2$
- 4  $T_h$  è diagonalizzabile soltanto per  $h \neq 3$
- 5  $T_h$  è diagonalizzabile soltanto per  $h \neq 2$  e  $h \neq 3$

a