Seconda prova in itinere di Geometria (Corso di laurea in Fisica, Canali A-C e D-O)

Prof. Barucci e Piccinni

27 gennaio 2012

a. Scrivere subito canale, cognome e nome.
b. Utilizzare questi fogli per le risposte. I fogli protocollo distribuiti a parte sono invece per eventuali riflessioni o calcoli, e non vanno consegnati.
c. Durante la prova non si possono consultare testi e appunti né usare fogli diversi da quelli distribuiti.
d. Durante la prova non è consentito uscire dall'aula.

Tempo a disposizione: 2 ore

Canale............................**Cognome**...**Nome**...

1. Sia $A \in M_n(\mathbb{R})$ e sia $\lambda \in \mathbb{R}$. Stabilire quale tra le seguenti affermazioni è vera

   $\boxed{1}$ $\det(\lambda A) = (-1)^n \lambda \det A$

   $\boxed{2}$ $\det(\lambda A) = (-1)^n \lambda^n \det A$

   $\boxed{3}$ $\det(\lambda A) = \lambda \det A$

   $\boxed{\bowtie 4}$ $\det(\lambda A) = \lambda^n \det A$

   $\boxed{5}$ Nessuna delle precedenti

2. Stabilire quali tra le seguenti affermazioni sono vere (eventualmente anche più risposte)

   $\boxed{1}$ Sia $A \in M_2(\mathbb{R})$ simmetrica ($A = A^t$). Allora $\det A \geq 0$

   $\boxed{\bowtie 2}$ Sia $A \in M_2(\mathbb{R})$ antisimmetrica ($A = -A^t$). Allora $\det A \geq 0$

   $\boxed{3}$ Sia $A \in M_3(\mathbb{R})$ simmetrica ($A = A^t$). Allora $\det A = 0$

   $\boxed{\bowtie 4}$ Sia $A \in M_3(\mathbb{R})$ antisimmetrica ($A = -A^t$). Allora $\det A = 0$

   $\boxed{5}$ Nessuna delle precedenti

3. Sia $A \in M_n(\mathbb{R})$, sia A^t la sua trasposta e siano I e 0 risp. la matrice identica e la matrice nulla. Stabilire quali tra le seguente implicazioni sono corrette (anche più risposte)

   $\boxed{\bowtie 1}$ $AA^t = I \Rightarrow \det A = \pm 1$

   $\boxed{2}$ $\det A = 1 \Rightarrow AA^t = I$

   $\boxed{\bowtie 3}$ $AA^t = 0 \Rightarrow A = 0$

   $\boxed{\bowtie 4}$ $AA^t = 0 \Rightarrow \det A = 0$

   Infatti, in 1, A è una matrice ortogonale, la 3 vale perché sulla diagonale principale di AA^t ci sono somme di quadrati di numeri reali, 4 è conseguenza di 3.

4. Si consideri nello spazio euclideo $\mathbb{R}^3$ la retta r di equazioni cartesiane $x + 2z - 1 = 0,\ y + 4z - 3 = 0$, essendo (x, y, z) le coordinate cartesiane di $\mathbb{R}^3$. Stabilire quali tra le seguenti affermazioni sono vere (eventualmente anche più risposte):

$\boxed{1}$ r ha parametri direttori $(1, 2, 4)$

$\boxed{2}$ r ha parametri direttori $(2, 4, 1)$

$\boxed{\bowtie 3}$ r ha parametri direttori $(-2, -4, 1)$

$\boxed{\bowtie 4}$ r è parallela al piano $2x + y + 8z - 1 = 0$

Infatti le equazioni parametriche della retta r sono

$$\begin{cases} x &= 1 - 2t \\ y &= 3 - 4t \\ z &= t \end{cases}$$

e i parametri direttori $(-2, -4, 1)$ annullano l'equazione del piano in 4.

5. Si considerino in $\mathbb{R}^3$ le rette $r_1 : x-z-1 = 0,\ y-2z = 0$, $r_2 : x-3z-1 = 0,\ y-z = 0$, $r_3 : x+z-1 = 0,\ y+4 = 0$ essendo (x, y, z) le coordinate di $\mathbb{R}^3$.

Stabilire quale tra le seguenti affermazioni ̀vera:

$\boxed{1}$ Non vi sono relazioni di perpendicolarità tra r_1, r_2, r_3

$\boxed{2}$ Le tre rette sono a due a due perpendicolari

$\boxed{\bowtie 3}$ Solo due tra le rette r_1, r_2, r_3 sono perpendicolari ma esse non sono incidenti

$\boxed{4}$ Solo due tra le rette r_1, r_2, r_3 sono perpendicolari ed esse sono anche incidenti

I parametri direttori di r_1, r_2, r_3 sono rispettivamente $(1, 2, 1)$, $(3, 1, 1)$ e $(-1, 0, 1)$. Il prodotto scalare canonico tra il primo e il terzo di questi vettori è zero quindi r_1 è ortogonale a r_3. Non ci sono altre relazioni di perpendicolarità. Inoltre le rette r_1 e r_3 non sono incidenti, infatti il sistema lineare ottenuto unendo le equazioni cartesiane di queste due rette risulta incompatibile.

6. Sia $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{C})$ una matrice complessa quadrata di ordine n, e sia $T(A) = \overline{A}$, dove $\overline{A} = (\overline{a}_{ij})$ è la matrice coniugata di A. $T : M_n(\mathbb{C}) \to M_n(\mathbb{C})$ è un'operatore lineare, rispetto alla struttura di spazio vettoriale complesso di $M_n(\mathbb{C})$?

$\boxed{1}$ Sì, per ogni n

$\boxed{2}$ E' lineare solo per $n = 1$

$\boxed{\bowtie 3}$ Non è mai lineare

Infatti ad esempio per $n = 1$, $T(\lambda\alpha) = \overline{\lambda\alpha} \neq \lambda T(\alpha) = \lambda\overline{\alpha}$.

7. Sia $A \in M_3(\mathbb{R})$ una matrice reale quadrata di ordine 3 *invertibile*. Stabilire quali tra le seguenti affermazioni sono vere (eventualmente anche più risposte):

$\boxed{1}$ Gli autovalori di A sono necessariamente distinti

$\boxed{2}$ A è diagonalizzabile

$\boxed{\bowtie 3}$ A non può ammettere l'autovalore $\lambda = 0$

$\boxed{4}$ Nessuna delle precedenti

Se A ammete l'autovalore 0 allora è singolare e quindi non è invertibile. Le affermazioni 1 e 2 si possono negare con degli esempi.

8. Si consideri la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix}$. Stabilire quali tra le seguenti affermazioni sono vere (eventualmente anche più risposte):

$\boxed{1}$ A non ammette autovalori reali

$\boxed{2}$ A ammette autovalori reali ma non tutte la molteplicità algebriche coincidono con le molteplicità geometriche

$\boxed{3}$ A ammette autovalori reali non distinti, ma tutte la molt. algebriche coincidono con le molt. geometriche

$\boxed{\bowtie 4}$ A ammette tre autovalori reali distinti

$\boxed{\bowtie 5}$ A è diagonalizzabile

Il polinomio caratteristico $\det(A - \lambda I)$ ha tre radici reali distinte. Questo assicura che la matrice è diagonalizzabile. In particolare ogni autovalore ha molteplicità algebrica 1 e molteplicità geometrica 1.

9. Sia $V = \mathbb{R}_{\leq 3}[x] = \{P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3\}$ lo spazio vettoriale dei polinomi di grado ≤ 3 a coefficienti reali, e sia $T : V \to V$ l'applicazione lineare (di derivata seconda) definita da definita da $T(P(x)) = P"(x)$, ovvero

$$T(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3) = 2a_2 + 6a_3x.$$

Stabilire quali tra le seguenti affermazioni sono vere (eventualmente anche più risposte):

$\boxed{1}$ T non ammette autovalori

$\boxed{\bowtie 2}$ T ammette solo l'autovalore $\lambda = 0$

$\boxed{3}$ T è diagonalizzabile

$\boxed{4}$ Nessuna delle precedenti

Rispetto alla base $\{1, x, x^2, x^3\}$, l'endomorfismo T è rappresentato dalla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Il polinomio caratteristico det $(A - \lambda I)$ è λ^4, che ha la sola radice 0 di molteplicità algebrica 4. D'altra parte la molteplicità geometrica dell'autovalore nullo è $4 - 2 = 2$ (infatti 2 è il rango della matrice A) e quindi T non è diagonalizzabile.

10. Sia

$$g : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

l'applicazione definita da

$$\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} \right) \longrightarrow x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_2y_2$$

Stabilire quali tra le seguenti affermazioni sono vere (anche più risposte):

$\boxed{\bowtie\, 1}$ g non è un prodotto scalare

$\boxed{2}$ g è un prodotto scalare e la matrice che lo rappresenta rispetto alle base canonica è $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$\boxed{3}$ g è un prodotto scalare e la matrice che lo rappresenta rispetto alle base $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$ è $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

$\boxed{4}$ g è un prodotto scalare e la matrice che lo rappresenta rispetto alle base $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$ è $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

g non è neanche una forma bilineare. Scambiando nel testo y_1 con x_2 le affermazioni 2 e 3 sarebbero state le risposte corrette.

a