Secondo appello di Geometria per Fisica, a.a. 2012-13, lettere Cf-K (Prof. P. Piccinni)
13 febbraio 2013

a. Scrivere subito Matricola, Cognome e Nome.
b. Utilizzare questi fogli per le risposte. I fogli protocollo sono invece per riflessioni o calcoli, e non vanno consegnati.
c. Durante la prova non si possono consultare testi e appunti né usare fogli diversi da quelli distribuiti.
d. Durante la prova non è consentito uscire dall'aula.

Tempo a disposizione: 2 ore

Matricola........................... **Cognome**... **Nome**...

1. Matrici del tipo

$$A_2 = \begin{pmatrix} a & a \\ a & a \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} a & b & a \\ b & c & b \\ a & b & a \end{pmatrix}, \quad A_4 = \begin{pmatrix} a & b & c & a \\ c & d & d & b \\ b & d & d & c \\ a & c & b & a \end{pmatrix}, \quad A_5 = \begin{pmatrix} a & b & c & d & a \\ d & e & f & e & b \\ c & f & g & f & c \\ b & e & f & e & d \\ a & d & c & b & a \end{pmatrix}$$

si dicono **invarianti per rotazioni** (di $90^o, 180^o, 270^o$ attorno al centro della matrice-tabella), e questa nozione può essere definita per matrici di ogni ordine n, p. es. per elementi di $M_n(\mathbb{R})$. Stabilire quali tra le seguenti affermazioni sono vere (anche più risposte).

$\boxed{1}$ Le matrici invarianti per rotazioni formano un sottospazio vettoriale di $M_n(\mathbb{R})$, per ogni $n \geq 2$
$\boxed{2}$ Le matrici invarianti per rotazioni formano un sottospazio vettoriale di $M_n(\mathbb{R})$, per $n = 2, 3$
$\boxed{3}$ Le matrici invarianti per rotazioni sono necessariamente simmetriche, per ogni $n \geq 2$
$\boxed{4}$ Le matrici invarianti per rotazioni sono necessariamente simmetriche, per $n = 2, 3$
$\boxed{5}$ Il determinante di una matrice invariante per rotazioni è necessariamente nullo, per ogni $n \geq 2$
$\boxed{6}$ Il determinante di una matrice invariante per rotazioni è necessariamente nullo, per $n = 2, 3$
$\boxed{7}$ Nessuna delle precedenti

2. Sia $V = \mathbb{R}_{\leq 2}[x] = \{a_0 + a_1 x + a_2 x^2\}$ lo spazio vettoriale dei polinomi in x di grado ≤ 2 a coefficienti in $\mathbb{R}$. Si consideri in V la base

$$\mathbb{E}' = (1,\ 1 + x,\ (1 + x)^2)$$

e l'endomorfismo T definito dalle formule:

$$T(1) = 1, \quad T(1 + x) = 1 - x, \quad T[(1 + x)^2] = (1 - x)^2.$$

Stabilire quali tra le seguenti affermazioni sono vere (anche più risposte):

$\boxed{1}$ Si passa dalla base canonica $\mathbb{E} = (1, x, x^2)$ di V alla base $\mathbb{E}'$ mediante da relazione matriciale $\mathbb{E}' = \mathbb{E}C$ dove la matrice del cambiamento di base è $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\boxed{2}$ La matrice associata a T alla base $\mathbb{E}'$, è

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\boxed{3}$ La matrice associata a T alla base $\mathbb{E}$ è $C^{-1}AC$
$\boxed{4}$ T è iniettivo e suriettivo
$\boxed{5}$ T è diagonalizzabile
$\boxed{6}$ Nessuna delle precedenti

3. Si consideri il sistema lineare a coefficienti reali:

$$\begin{cases} 3\sqrt{2}\,x & - & 9\,y & = & 21 \\ \sqrt{8}\,x & - & 6\,y & = & 14 \end{cases}$$

Stabilire quale tra le seguenti affermazioni è vera:

$\boxed{1}$ Il sistema ammette un'unica soluzione (x_0, y_0), costituita da una coppia di numeri razionali
$\boxed{2}$ Il sistema ammette un'unica soluzione (x_0, y_0), costituita da una coppia di reali non entrambi razionali
$\boxed{3}$ Il sistema ammette infinite soluzioni, ma nessuna di esse consiste di una coppia di numeri razionali
$\boxed{4}$ Il sistema ammette infinite soluzioni, e alcune di esse consistono di coppie di numeri razionali
$\boxed{5}$ Il sistema non ammette soluzioni reali

4. Si considerino nello spazio euclideo $\mathbb{R}^3$ i piani

$$\alpha_1 : x + y + z = 0, \quad \alpha_2 : x + y + z = 1, \quad \alpha_3 : 2x - y - z = 0,$$

$$\alpha_4 : 2x - y - z = 1, \quad \alpha_5 : y - z = 0, \quad \alpha_6 : y - z = 1.$$

essendo (x, y, z) le coordinate di $\mathbb{R}^3$. Stabilire quali tra le seguenti affermazioni sono vere (anche più risposte):

$\boxed{1}$ $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6$, sono a due a due paralleli
$\boxed{2}$ Ogni coppia di piani non paralleli tra $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6$ consiste di piani perpendicolari
$\boxed{3}$ $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6$, delimitano in $\mathbb{R}^3$ un parallelepipedo Π a facce rettangolari
$\boxed{4}$ Ognuno dei punti $O = (0, 0, 0)$ e $Q = (\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3})$ è comune a tre dei piani e pertanto O e Q sono vertici di Π
$\boxed{5}$ Π è un cubo
$\boxed{6}$ Nessuna delle precedenti

5. Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1+i & 1-i \\ i & -i \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C}).$$

Stabilire quali tra le seguenti affermazioni sono vere (anche più risposte):

$\boxed{1}$ $\det A = 0$
$\boxed{2}$ A è diagonalizzabile su $\mathbb{C}$, avendo autovalori distinti
$\boxed{3}$ A è diagonalizzabile su $\mathbb{C}$, pur avendo autovalori coincidenti
$\boxed{4}$ A non è diagonalizzabile su $\mathbb{C}$
$\boxed{5}$ Gli autovalori di A sono reali

6. Si considerino in $\mathbb{R}^3$ i vettori $\vec{v} = (1, 1, 0)$, $\vec{w} = (1, 0, 2)$, $\vec{z} = (0, 1, 1)$ e si denoti con il simbolo $\wedge$ il prodotto vettoriale. Stabilire quali tra le seguenti affermazioni sono corrette (anche più risposte):

$\boxed{1}$ Risulta $(\vec{v} \wedge \vec{w}) \wedge \vec{z} = \vec{v} \wedge (\vec{w} \wedge \vec{z})$
$\boxed{2}$ Risulta $(\vec{v} \wedge \vec{w}) \wedge \vec{z} \neq \vec{v} \wedge (\vec{w} \wedge \vec{z})$
$\boxed{3}$ Il prodotto vettoriale è associativo
$\boxed{4}$ Il prodotto vettoriale non è associativo
$\boxed{5}$ Il prodotto vettoriale non è associativo, ma in modulo sì:
$|(\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2) \wedge \vec{v}_3| = |\vec{v}_1 \wedge (\vec{v}_2 \wedge \vec{v}_3)|$ per ogni $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3 \in \mathbb{R}^3$
$\boxed{6}$ Per qualche scelta di $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3 \in \mathbb{R}^3$ può risultare $(\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2) \wedge \vec{v}_3 = \vec{0}$, ma $\vec{v}_1 \wedge (\vec{v}_2 \wedge \vec{v}_3) \neq \vec{0}$