Soluzioni della prova scritta del secondo appello di Geometria per Fisica, a.a. 2012-13
Canale Cf-K (Prof. P. Piccinni)
13 febbraio 2013

1. Matrici del tipo

$$A_2 = \begin{pmatrix} a & a \\ a & a \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} a & b & a \\ b & c & b \\ a & b & a \end{pmatrix}, \quad A_4 = \begin{pmatrix} a & b & c & a \\ c & d & d & b \\ b & d & d & c \\ a & c & b & a \end{pmatrix}, \quad A_5 = \begin{pmatrix} a & b & c & d & a \\ d & e & f & e & b \\ c & f & g & f & c \\ b & e & f & e & d \\ a & d & c & b & a \end{pmatrix}$$

si dicono **invarianti per rotazioni** (di $90^o, 180^o, 270^o$ attorno al centro della matrice-tabella), e questa nozione può essere definita per matrici di ogni ordine n, p. es. per elementi di $M_n(\mathbb{R})$. Stabilire quali tra le seguenti affermazioni sono vere (anche più risposte).

$\boxed{1}$ Le matrici invarianti per rotazioni formano un sottospazio vettoriale di $M_n(\mathbb{R})$, per ogni $n \geq 2$
$\boxed{2}$ Le matrici invarianti per rotazioni formano un sottospazio vettoriale di $M_n(\mathbb{R})$, per $n = 2, 3$
$\boxed{3}$ Le matrici invarianti per rotazioni sono necessariamente simmetriche, per ogni $n \geq 2$
$\boxed{4}$ Le matrici invarianti per rotazioni sono necessariamente simmetriche, per $n = 2, 3$
$\boxed{5}$ Il determinante di una matrice invariante per rotazioni è necessariamente nullo, per ogni $n \geq 2$
$\boxed{6}$ Il determinante di una matrice invariante per rotazioni è necessariamente nullo, per $n = 2, 3$
$\boxed{7}$ Nessuna delle precedenti

Soluzione. La condizione per una matrice quadrata di essere invariante per rotazioni è espressa da un sistema di equazioni lineari omogenee nelle coordinate a_{ij} delle matrici stesse, e ciò vale per matrici di ordine n arbitrario. Scriviamo a titolo di esempio alcune di queste equazioni lineari omogenee: $a_{11} = a_{1n} = a_{nn} = a_{n1}$, $a_{12} = a_{2n} = a_{n,n-1} = a_{n-1,1}$, ecc. ecc. Pertanto l'insieme delle matrici invarianti per rotazioni, come ogni sottoinsieme di uno spazio vettoriale caratterizzato da un sistema lineare omogeneo nelle coordinate, è un sottospazio vettoriale. Dunque le affermazioni 1 e 2 sono corrette. Come si vede dagli esempi espliciti delle matrici A_2, A_3, A_4, A_5 menzionate nel testo, A_2 e A_3 sono simmetriche, ma A_4 e A_5 no: dunque l'affermazione 3 è falsa mentre la 4 è vera. Dagli stessi esempi si vede che $\det A_2 = \det A_3 = 0$, ma p. es. calcolando $\det A_4$ con le scelte $a = d = 0$ si ottiene facilmente il valore $-(b^2 - c^2)^2$, che per $b \neq c$ è non nullo. Dunque le affermazioni 5 e 6 sono rispettivamente falsa e vera.

2. Sia $V = \mathbb{R}_{\leq 2}[x] = \{a_0 + a_1 x + a_2 x^2\}$ lo spazio vettoriale dei polinomi in x di grado ≤ 2 a coefficienti in $\mathbb{R}$. Si consideri in V la base

$$\mathbb{E}' = (1,\ 1+x,\ (1+x)^2)$$

e l'endomorfismo T definito dalle formule:

$$T(1) = 1, \quad T(1+x) = 1-x, \quad T[(1+x)^2] = (1-x)^2.$$

Stabilire quali tra le seguenti affermazioni sono vere (anche più risposte):

$\boxed{1}$ Si passa dalla base canonica $\mathbb{E} = (1, x, x^2)$ di V alla base $\mathbb{E}'$ mediante da relazione matriciale $\mathbb{E}' = \mathbb{E}C$ dove la matrice del cambiamento di base è $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
$\boxed{2}$ La matrice associata a T alla base $\mathbb{E}'$, è

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\boxed{3}$ La matrice associata a T alla base $\mathbb{E}$ è $C^{-1}AC$
$\boxed{4}$ T è iniettivo e suriettivo
$\boxed{5}$ T è diagonalizzabile
$\boxed{6}$ Nessuna delle precedenti

Soluzione. La matrice del cambianto di base è la matrice che ha per colonne le componenti dei vettori della base $\mathbb{E}'$ nella base $\mathbb{E}$. E' evidentemente $1 = 1, 1 + x = 1 + x, (1 + x)^2 = 1 + 2x + x^2$ e pertanto tale matrice è C e l'affermazione 1 è corretta. Invece la matrice associata a T nella base $\mathbb{E}'$ è la matrice che ha per colonne le coordinate dei polinomi $T(1) = 1,\ T(1+x) = 1-x,\ T[(1+x)^2] = (1-x)^2$ nella base $\mathbb{E}'$. Poiché $1 = 1, 1-x = 2 \cdot 1 - 1(1+x), (1-x)^2 = 4 \cdot 1 - 4(1+x) + 1(1+x)^2$, tale matrice è A e dunque anche l'affermazione 2 è corretta. L'affermazione 3 è invece falsa: la matrice del cambiamento di base da $\mathbb{E}'$ a $\mathbb{E}$ è C^{-1} (che è diversa da C). Dunque la matrice associata a T nella base $\mathbb{E}$ è CAC^{-1}, e l'affermazione 3 è falsa. Tornando alla matrice A, essa ha determinante non nullo, e dunque l'affermazione 4 è corretta. Gli autovalori di A sono 1 e -1, elementi diagonali di una matrice triangolare superiore e dunque certamente zeri del polinomio caratteristico. L'autovalore 1 ha molteplicità algebrica 2 e dunque, per valutare l'affermazione 4, si deve determinare la sua molteplicità geometrica. Essa è data dall'infinità delle soluzioni del sistema lineare omogeneo $A\vec{x} = \vec{x}$, che scrivendo $\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ e moltiplicando righe per colonne, si esplicita nelle tre equazioni lineari omogenee $x = x + 2y + 4z,\ y = -y - 4z,\ z = z$, il cui sistema ammette le ∞^2 soluzioni $(x, y, z) = (s, -2t, t)$. Quindi T è diagonalizzabile e anche l'affermazione 5 è corretta.

3. Si consideri il sistema lineare a coefficienti reali:

$$\begin{cases} 3\sqrt{2}\,x & - & 9\,y & = & 21 \\ \sqrt{8}\,x & - & 6\,y & = & 14 \end{cases}$$

Stabilire quale tra le seguenti affermazioni è vera:

$\boxed{1}$ Il sistema ammette un'unica soluzione (x_0, y_0), costituita da una coppia di numeri razionali
$\boxed{2}$ Il sistema ammette un'unica soluzione (x_0, y_0), costituita da una coppia di reali non entrambi razionali
$\boxed{3}$ Il sistema ammette infinite soluzioni, ma nessuna di esse consiste di una coppia di numeri razionali
$\boxed{4}$ Il sistema ammette infinite soluzioni, e alcune di esse consistono di coppie di numeri razionali
$\boxed{5}$ Il sistema non ammette soluzioni reali

Soluzione. La seconda equazione è evidentemente ottenuta dalla prima moltiplicandola per $\frac{2}{3}$ e il sistema ha dunque infinite soluzioni. Tali soluzioni coincidono con quelle della prima equazione, dunque con le coppie $(x, y) = (t, \frac{\sqrt{2}t-7}{3})$, dove $t \in \mathbb{R}$. Ora se $t = \frac{n}{m}$ è razionale (assumiamo qui n, m interi, e più oltre anche n', m' interi), osserviamo che se, $t \neq 0$, non puo' esserlo anche $\frac{\sqrt{2}t-7}{3} = \frac{\sqrt{2}\frac{n}{m}-7}{3}$. Infatti in caso contrario avremmo:

$$\sqrt{2}\frac{n}{m} = 7 + 3\frac{n'}{m'}$$

e ciò, nell'ipotesi $t \neq 0$ e dunque $n \neq 0$, implicherebbe che $\sqrt{2}$ è razionale. Dunque l'unica soluzione razionale del sistema è $(0, -\frac{7}{3})$, e l' affermazione corretta è 4.

N. B. Nella valutazione anche la risposta 3 è stata valutata corretta.

4. Si considerino nello spazio euclideo $\mathbb{R}^3$ i piani

$$\alpha_1 : x + y + z = 0, \quad \alpha_2 : x + y + z = 1, \quad \alpha_3 : 2x - y - z = 0,$$

$$\alpha_4 : 2x - y - z = 1, \quad \alpha_5 : y - z = 0, \quad \alpha_6 : y - z = 1.$$

essendo (x, y, z) le coordinate di $\mathbb{R}^3$. Stabilire quali tra le seguenti affermazioni sono vere (anche più risposte):

$\boxed{1}$ $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6,$ sono a due a due paralleli
$\boxed{2}$ Ogni coppia di piani non paralleli tra $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6$ consiste di piani perpendicolari
$\boxed{3}$ $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6,$ delimitano in $\mathbb{R}^3$ un parallelepipedo Π a facce rettangolari
$\boxed{4}$ Ognuno dei punti $O = (0, 0, 0)$ e $Q = (\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3})$ è comune a tre dei piani e pertanto O e Q sono vertici di Π
$\boxed{5}$ Π è un cubo
$\boxed{6}$ Nessuna delle precedenti

Soluzione. La condizione rg $\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix} = 1$ di parallelismo tra due piani implica subito che $\alpha_1 \parallel \alpha_2$, $\alpha_3 \parallel \alpha_4$, $\alpha_5 \parallel \alpha_6$. Simiolmente la condizione $aa' + bb' + cc' = 0$ di perpendicolarità tra due piani mostra che ognuno dei sei piani è parallelo non agli altri cinque, ma agli altri quattro cui non è pararallelo. Dunque le affermazioni 1 e 2 sono corrette, e di conseguenza è corretta l'affermazione 3. Risulta, come subito si vede: $O = \alpha_1 \cap \alpha_3 \cap \alpha_5$, $Q = \alpha_2 \cap \alpha_4 \cap \alpha_6$, ed essi sono vertici opposti del parallelepipedo Π (affermazione 4, corretta). L'affermazione 5 invece è falsa, come si vede p. es. considerando le distanze del punto O dai tre piani cui non appartiene. Risulta infatti. $d(O, \alpha_2) = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $d(O, \alpha_4) = \frac{1}{\sqrt{6}}$, $d(O, \alpha_6) = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Dunque non solo Π non ùn cubo, ma nessuna delle sue sei facce è un quadrato.

5. Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1+i & 1-i \\ i & -i \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C}).$$

Stabilire quali tra le seguenti affermazioni sono vere (anche più risposte):

$\boxed{1}$ $\det A = 0$
$\boxed{2}$ A è diagonalizzabile su $\mathbb{C}$, avendo autovalori distinti
$\boxed{3}$ A è diagonalizzabile su $\mathbb{C}$, pur avendo autovalori coincidenti
$\boxed{4}$ A non è diagonalizzabile su $\mathbb{C}$
$\boxed{5}$ Gli autovalori di A sono reali

Soluzione. Risulta subito $\det A = -2i \neq 0$ e naturalmente tr $A = 1$. Ciò implica che gli autovalori di A sono distinti (in quanto non reali, e con parte immaginaria una opposta dell'altra): Dunque l' affermazione 2 è corretta, mentre le 1, 3, 4 e 5 sono false.

6. Si considerino in $\mathbb{R}^3$ i vettori $\vec{v} = (1, 1, 0)$, $\vec{w} = (1, 0, 2)$, $\vec{z} = (0, 1, 1)$ e si denoti con il simbolo $\wedge$ il prodotto vettoriale. Stabilire quali tra le seguenti affermazioni sono corrette (anche più risposte):

$\boxed{1}$ Risulta $(\vec{v} \wedge \vec{w}) \wedge \vec{z} = \vec{v} \wedge (\vec{w} \wedge \vec{z})$
$\boxed{2}$ Risulta $(\vec{v} \wedge \vec{w}) \wedge \vec{z} \neq \vec{v} \wedge (\vec{w} \wedge \vec{z})$
$\boxed{3}$ Il prodotto vettoriale è associativo
$\boxed{4}$ Il prodotto vettoriale non è associativo
$\boxed{5}$ Il prodotto vettoriale non è associativo, ma in modulo sì:
$|(\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2) \wedge \vec{v}_3| = |\vec{v}_1 \wedge (\vec{v}_2 \wedge \vec{v}_3)|$ per ogni $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3 \in \mathbb{R}^3$
$\boxed{6}$ Per qualche scelta di $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3 \in \mathbb{R}^3$ può risultare $(\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2) \wedge \vec{v}_3 = \vec{0}$, ma $\vec{v}_1 \wedge (\vec{v}_2 \wedge \vec{v}_3) \neq \vec{0}$

Soluzione. Usando l'espressione analitica del prodotto vettoriale si ottiene $\vec{v} \wedge \vec{w} = (2, -2, 1), \vec{w} \wedge \vec{z} = -2, -1, 1)$ e dunque:

$$(\vec{v} \wedge \vec{w}) \wedge \vec{z} = (-1, -2, 2) \neq \vec{v} \wedge (\vec{w} \wedge \vec{z}) = (1, -1, 1).$$

Pertanto 2 e 4 sono affermazioni corrette, e 1 e 3 no. Anche 5 è falsa, e il precedente esempio lo mostra. E' vera invece l'affermazione 6, che vale p. es. se il vettore $\vec{v}_3$ è perpendicolare al piano di $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$, ma $\vec{v}_1$ non è perpendicolare al piano di $\vec{v}_2$ e $\vec{v}_3$; un esempio numerico per l'affermazione 6 è $\vec{v}_1 = (1, 0, 0), \vec{v}_2 = (1, 1, 0), \vec{v}_3 = (0, 0, 1)$.