Terzo appello di Geometria per Fisica, a.a. 2012-13, lettere Cf-K (Prof. P. Piccinni)
21 giugno 2013

a. Scrivere subito Matricola, Cognome e Nome.
b. Utilizzare questi fogli per le risposte. I fogli protocollo sono invece per riflessioni o calcoli, e non vanno consegnati.
c. Durante la prova non si possono consultare testi e appunti né usare fogli diversi da quelli distribuiti.
d. Durante la prova non è consentito uscire dall'aula.

Tempo a disposizione: 2 ore

Matricola............................**Cognome**..**Nome**..

1. Si consideri la matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ il cui elemento di posto (i, j) è $a_{ij} = (-1)^{i+j}a$, essendo a un fissato numero reale diverso da zero. Sia $S \subset M_n(\mathbb{R})$ l'insieme di tali matrici A, al variare di $a \in \mathbb{R} - \{0\}$.

   Stabilire quali tra le seguenti affermazioni sono vere (anche più risposte).

   $\boxed{1}$ Per ogni $n \geq 2$, e per ogni $A \in S$ risulta $\det A = 0$
   $\boxed{2}$ Per ogni $A \in S$ risulta $rg\ A = 1$
   $\boxed{3}$ Ogni $A \in S$ ha tutti gli autovalori reali
   $\boxed{4}$ Ogni $A \in S$ ha solo due autovalori distinti
   $\boxed{5}$ Ogni $A \in S$ è diagonalizzabile
   $\boxed{6}$ Nessuna delle precedenti

2. Sia $V = \mathbb{R}_{\leq 2}[x] = \{P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2\}$ lo spazio vettoriale dei polinomi in x di grado ≤ 2 a coefficienti in $\mathbb{R}$. Si consideri l'applicazione $T : V \to V$ definita da:

$$T(P(x)) = P(0) + P(1)x + P(2)x^2.$$

   Stabilire quali tra le seguenti affermazioni sono vere (anche più risposte):

   $\boxed{1}$ T è un endomorfismo di V
   $\boxed{2}$ T è un'applicazione suriettiva
   $\boxed{3}$ T è un'applicazione iniettiva
   $\boxed{4}$ Nessuna delle precedenti

3. Si consideri il sistema lineare a coefficienti reali:

$$\begin{cases} x + y = 10 \\ x + z = 100 \\ y + z = 1000 \end{cases}$$

   Stabilire quali tra le seguenti affermazioni sono vere (anche più risposte):

   $\boxed{1}$ Il sistema ammette un'unica soluzione
   $\boxed{2}$ Le tre equazioni rappresentano in $\mathbb{R}^3$ tre piani che si intersecano solo in un punto
   $\boxed{3}$ Le tre equazioni rappresentano in $\mathbb{R}^3$ tre piani che sono facce laterali di un prisma a base triangolare
   $\boxed{4}$ Nessuna delle precedenti

4. Si considerino nello spazio euclideo $\mathbb{R}^3$ le rette $r : x = z,\ y = z,\ s : x = -z,\ y = z$ e $t : x = z,\ y = -z$, essendo (x, y, z) le coordinate cartesiane di $\mathbb{R}^3$. Stabilire quali tra le seguenti affermazioni sono vere (anche più risposte):

   $\boxed{1}$ r, s e t sono a due a due perpendicolari

   $\boxed{2}$ Solo due tra r, s e t sono perpendicolari

   $\boxed{3}$ r, s e t sono parallele

   $\boxed{4}$ r, s e t sono complanari

   $\boxed{5}$ Nessuna delle precedenti

5. Si consideri la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}$. Stabilire quali tra le seguenti affermazioni sono vere (anche più risposte):

   $\boxed{1}$ A non ammette autovalori reali

   $\boxed{2}$ A ammette tre autovalori reali distinti

   $\boxed{3}$ A ammette autovalori reali non distinti, ma tutte le molt. algebriche coincidono con le molt. geometriche

   $\boxed{4}$ A ammette un solo autovalore reale

   $\boxed{5}$ A è diagonalizzabile in $M_n(\mathbb{R})$

   $\boxed{6}$ Nessuna delle precedenti

6. Sia
$$g : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$
l'applicazione definita da
$$\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \right) \longrightarrow 2x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_2y_2$$
Stabilire quali tra le seguenti affermazioni sono vere (anche più risposte):

   $\boxed{1}$ g è una forma bilineare, ma non è simmetrica

   $\boxed{2}$ g è una forma bilineare simmetrica, ma non è definita positiva

   $\boxed{3}$ g è una forma bilineare simmetrica, definita positiva

   $\boxed{4}$ La matrice che rappresenta g nella base canonica è $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

   $\boxed{5}$ La matrice che rappresenta g nella base canonica è $A = \begin{pmatrix} 2 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$