Terzo appello di Geometria per Fisica, a.a. 2012-13, lettere Cf-K (Prof. P. Piccinni)
21 giugno 2013

a. Scrivere subito Matricola, Cognome e Nome.
b. Utilizzare questi fogli per le risposte. I fogli protocollo sono invece per riflessioni o calcoli, e non vanno consegnati.
c. Durante la prova non si possono consultare testi e appunti né usare fogli diversi da quelli distribuiti.
d. Durante la prova non è consentito uscire dall'aula.

Tempo a disposizione: 2 ore

Matricola............................**Cognome**..**Nome**..

1. Si consideri la matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ il cui elemento di posto (i,j) è $a_{ij} = (-1)^{i+j}a$, essendo a un fissato numero reale diverso da zero. Sia $S \subset M_n(\mathbb{R})$ l'insieme di tali matrici A, al variare di $a \in \mathbb{R} - \{0\}$.

   Stabilire quali tra le seguenti affermazioni sono vere (anche più risposte).

$\bowtie$ 1	Per ogni $n \geq 2$, e per ogni $A \in S$ risulta $\det A = 0$
$\bowtie$ 2	Per ogni $A \in S$ risulta $rg\ A = 1$
$\bowtie$ 3	Ogni $A \in S$ ha tutti gli autovalori reali
$\bowtie$ 4	Ogni $A \in S$ ha solo due autovalori distinti
$\bowtie$ 5	Ogni $A \in S$ è diagonalizzabile
6	Nessuna delle precedenti

   Ogni $A \in S$ ha le righe tutte uguali a meno del segno. Ne segue che le affermazioni 1 e 2 sono vere. Inoltre, per quanto sopra il polinomio caratteristico di ogni tale A è del tipo $\lambda^n - na\lambda^{n-1}$: ne segue che vi sono due autovalori: $\lambda_1 = 0$, con molteplicità sia algebrica che geometrica $n-1$ e $\lambda_2 = na \neq 0$. Ne segue che anche 3, 4 e 5 sono vere.

2. Sia $V = \mathbb{R}_{\leq 2}[x] = \{P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2\}$ lo spazio vettoriale dei polinomi in x di grado ≤ 2 a coefficienti in $\mathbb{R}$. Si consideri l'applicazione $T : V \to V$ definita da:

   $$T(P(x)) = P(0) + P(1)x + P(2)x^2.$$

   Stabilire quali tra le seguenti affermazioni sono vere (anche più risposte):

$\bowtie$ 1	T è un endomorfismo di V
$\bowtie$ 2	T è un'applicazione suriettiva
$\bowtie$ 3	T è un'applicazione iniettiva
4	Nessuna delle precedenti

   Risulta $P(0) = a_0, P(1) = a_0 + a_1 + a_2, P(2) = a_0 + 2a_1 + 4a_2$. Dunque T è lineare, ovvero l'affermazione 1 è vera. Sono vere anche 2 e 3: infatti la matrice, nella base $(1, x, x^2)$ di V risulta essere $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, che ha rango massimo 3. Ne segue che T è suriettiva e dunque anche iniettiva.

3. Si consideri il sistema lineare a coefficienti reali:

   $$\begin{cases} x + y = 10 \\ x + z = 100 \\ y + z = 1000 \end{cases}$$

Stabilire quali tra le seguenti affermazioni sono vere (anche più risposte):

$\boxed{\bowtie 1}$ Il sistema ammette un'unica soluzione
$\boxed{\bowtie 2}$ Le tre equazioni rappresentano in $\mathbb{R}^3$ tre piani che si intersecano solo in un punto
$\boxed{3}$ Le tre equazioni rappresentano in $\mathbb{R}^3$ tre piani che sono facce laterali di un prisma a base triangolare
$\boxed{4}$ Nessuna delle precedenti

Il rango della matrice dei coefficienti è 3, e dunque il sistema ammette un'unica soluzione. Ne segue che le tre equazioni rappresentano piani che si intersecano in un solo punto.

4. Si considerino nello spazio euclideo $\mathbb{R}^3$ le rette $r : x = z,\ y = z$, $s : x = -z,\ y = z$ e $t : x = z,\ y = -z$, essendo (x, y, z) le coordinate cartesiane di $\mathbb{R}^3$. Stabilire quali tra le seguenti affermazioni sono vere (anche più risposte):

$\boxed{1}$ r, s e t sono a due a due perpendicolari

$\boxed{2}$ Solo due tra r, s e t sono perpendicolari

$\boxed{3}$ r, s e t sono parallele

$\boxed{4}$ r, s e t sono complanari

$\boxed{\bowtie 5}$ Nessuna delle precedenti

I parametri direttori delle tre rette sono rispettivamente $(1, 1, 1), (-1, 1, 1), (1, -1, 1)$, e sono dunque linearmente indipendenti. Ne segue che tra le tre rette non intercorrono relazioni né di perperdicolarità, né di parallelismo, né di complanarità.

5. Si consideri la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}$. Stabilire quali tra le seguenti affermazioni sono vere (anche più risposte):

$\boxed{1}$ A non ammette autovalori reali

$\boxed{2}$ A ammette tre autovalori reali distinti

$\boxed{3}$ A ammette autovalori reali non distinti, ma tutte le molt. algebriche coincidono con le molt. geometriche

$\boxed{\bowtie 4}$ A ammette un solo autovalore reale

$\boxed{5}$ A è diagonalizzabile in $M_n(\mathbb{R})$

$\boxed{6}$ Nessuna delle precedenti

Il polinomio caratteristico di A è $\lambda^3 - \lambda^2 - \lambda - 2 = (\lambda - 2)(\lambda^2 + \lambda + 1)$. Ne segue che A ammette un solo autovalore reale, e pertanto non è diagonalizzabile in $M_n(\mathbb{R})$

6. Sia

$$g : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

l'applicazione definita da

$$\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \right) \longrightarrow 2x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_2y_2$$

Stabilire quali tra le seguenti affermazioni sono vere (anche più risposte):

$\boxed{1}$ g è una forma bilineare, ma non è simmetrica

$\boxed{2}$ g è una forma bilineare simmetrica, ma non è definita positiva

$\boxed{\bowtie 3}$ g è una forma bilineare simmetrica, definita positiva

$\boxed{\bowtie 4}$ La matrice che rappresenta g nella base canonica è $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$\boxed{5}$ La matrice che rappresenta g nella base canonica è $A = \begin{pmatrix} 2 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$

g è chiaramente una forma bilineare e la sua matrice nella base canonica di $\mathbb{R}^2$ è subito riconoscibile in $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Ne segue che g è bilineare e definita positiva.