Quarto appello di Geometria per Fisica, a.a. 2012-13, lettere Cf-K (Prof. P. Piccinni)
24 settembre 2013

a. Scrivere subito Matricola, Cognome e Nome.
b. Utilizzare questi fogli per le risposte. I fogli protocollo sono invece per riflessioni o calcoli, e non vanno consegnati.
c. Durante la prova non si possono consultare testi e appunti né usare fogli diversi da quelli distribuiti.
d. Durante la prova non è consentito uscire dall'aula.

Tempo a disposizione: 2 ore

Matricola............................**Cognome**..**Nome**...

1. Si consideri il sottoinsieme $W_h \subset M_3(\mathbb{R})$ così definito:

$$W_h = \{A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R}) \text{ tali che } a_{11} - a_{12} + a_{13} = a_{21} - a_{22} + a_{23} = a_{31} - a_{32} + a_{33} = h\},$$

essendo h un numero reale fissato.

Stabilire quali tra le seguenti affermazioni sono vere (anche più risposte):

$\boxed{1}$ W_h è un sottospazio vettoriale di $M_3(\mathbb{R})$, per ogni $h \in \mathbb{R}$
$\boxed{2}$ Posto $W = \bigcup_{h\in\mathbb{R}} W_h$, risulta $W = M_3(\mathbb{R})$
$\boxed{\bowtie 3}$ W è un sottospazio vettoriale di $M_3(\mathbb{R})$
$\boxed{4}$ Se $A \in W$, risulta $\det A = 0$
$\boxed{5}$ Nessuna delle precedenti

I sottospazi vettoriali sono rappresentati da equazioni lineari omogenee nelle coordinate. Pertanto W_h è un sottospazio vettoriale di $M_3(\mathbb{R})$ solo per $h = 0$. È invece un sottospazio vettoriale l'insieme W, rappresentato dalle equazioni lineari omogenee $a_{11} - a_{12} + a_{13} = a_{21} - a_{22} + a_{23} = a_{31} - a_{32} + a_{33}$. Esso è tuttavia un sottospazio proprio di $M_3(\mathbb{R})$, in quanto p. es. la matrice identica appartiene alla differenza.

2. Si considerino le equazioni a coefficienti complessi:

$$(a)\ z^4 + 1 = 0, \qquad (b)\ z^4 - 1 = 0,$$
$$(c)\ z^4 + 2z^2 + 1 = 0, \qquad (d)\ z^4 - 2z^2 + 1 = 0.$$

Stabilire quali tra le seguenti affermazioni sono vere (anche più risposte):

$\boxed{1}$ Le equazioni (b), (c), (d) ammettono solo soluzioni reali
$\boxed{\bowtie 2}$ Le equazioni (a) e (b) ammettono in $\mathbb{C}$ quattro soluzioni distinte
$\boxed{\bowtie 3}$ Le equazioni (c) e (d) ammettono in $\mathbb{C}$ quattro soluzioni, coincidenti a coppie
$\boxed{4}$ Esiste uno $z_0 \in \mathbb{C}$ che è soluzione di tutte le equazioni (a), (b), (c) e (d)
$\boxed{5}$ Nessuna delle precedenti

Le quattro equazioni possono essere riscritte nel modo seguente:

$$(a)\ (z^2 + i)(z^2 - i) = 0, \qquad (b)\ (z^2 + 1)(z^2 - 1) = 0,$$
$$(c)\ (z^2 + 1)^2 = 0, \qquad (d)\ (z^2 - 1)^2 = 0.$$

Si riconosce allora subito che le uniche affermazioni corrette sono la 2 e la 3.

3. Sia $A \in M_n(\mathbb{R})$, sia $A^2 = A \cdot A$ (righe per colonne) il quadrato di A, e sia A^t la trasposta di A. Stabilire quali tra le seguenti affermazioni sono vere (anche più risposte):

$\boxed{\bowtie 1}$	$(A^2)^t = (A^t)^2$ per ogni $A \in M_n(\mathbb{R})$
$\boxed{2}$	$(A^2)^t = (A^t)^2$ se e solo se A è simmetrica
$\boxed{3}$	$(A^2)^t = (A^t)^2$ se e solo se $\det A = 0$
$\boxed{4}$	Nessuna delle precedenti

Dalla definizione di prodotto righe per colonna si ha subito l'identità $(AB)^t = B^t A^t$, valida per tutte le coppie di matrici moltiplicabili. Dunque per $A = B \in M_n(\mathbb{R})$ risulta valida l'affermazione 1.

4. Si considerino nello spazio euclideo $\mathbb{R}^3$ i piani affini

$$\alpha_1 : 2x - y - z + 2 = 0 \qquad \text{e} \qquad \alpha_2 : x + y + z + 3 = 0,$$

e le rette affini

$$r_1 : x + 2z + 3 = 0,\ y - z = 0 \qquad \text{e} \qquad r_2 : x - z = 0,\ y - z - 2 = 0,$$

essendo (x, y, z) le coordinate cartesiane di $\mathbb{R}^3$.

Stabilire quali tra le seguenti affermazioni sono vere (anche più risposte):

$\boxed{\bowtie 1}$	I piani α_1, α_2 sono tra loro perpendicolari
$\boxed{\bowtie 2}$	Le rette r_1, r_2 sono tra loro perpendicolari
$\boxed{\bowtie 3}$	La retta r_1 è contenuta nel piano α_2
$\boxed{\bowtie 4}$	La retta r_2 è contenuta nel piano α_1
$\boxed{5}$	La retta $s = \alpha_1 \cap \alpha_2$ ha parametri direttori $(0, 1, 1)$
$\boxed{6}$	Nessuna delle precedenti

I parametri di giacitura dei piani α_1 e α_2 sono rispettivamente $(2, -1, -1)$ e $(1, 1, 1)$. I parametri direttori delle rette r_1 e r_2 sono invece rispettivamente $(-2, 1, 1)$ e $(1, 1, 1)$. Si riconosce quindi subito la perpendicolarità tra α_1 e α_2, e quella tra r_1 e r_2. Scrivendo poi le equazioni di r_1 nella forma $x = -2z - 3,\ y = z$ e sostituendo nell'equazione di $\alpha_2 :\ x + y + z + 3 = 0$ si ottiene un'identità, e dunque $r_1 \subset \alpha_2$. Similmente le equazioni di r_2 possono essere scritte come $x = z,\ y = z + 2$, e sostituendo nell'equazione di $\alpha_1 :\ 2x - y - z + 2 = 0$ di nuovo si vede che $r_2 \subset \alpha_1$. Infine, la retta s ha parametri direttori $(0, -3, 3)$ (minori a segni alterni della matrice dei parametri di giacitura di α_1 e α_2). Pertanto l'affermazione 5 non è corretta.

5. Si consideri la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Stabilire quali tra le seguenti affermazioni sono vere (anche più risposte):

$\boxed{\bowtie 1}$	A è antisimmetrica di ordine 3 e pertanto $\det A = 0$
$\boxed{\bowtie 2}$	$\det A = 0$
$\boxed{\bowtie 3}$	L'unico autovalore reale di A è zero
$\boxed{4}$	A è diagonalizzabile in $M_n(\mathbb{R})$
$\boxed{\bowtie 5}$	A è diagonalizzabile in $M_n(\mathbb{C})$
$\boxed{6}$	Nessuna delle precedenti

Le identità $\det A^t = \det A = (-1)^n \det(-A)$ mostrano che per matrici antisimmetriche ($A^t = -A$) di ordine n dispari risulta $\det A = 0$. Gli autovalori della nostra A risultano (essendo $\lambda^3 + 3\lambda$ il polinomio caratteristico) $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = \sqrt{3}i, \lambda_3 = -\sqrt{3}i$. Ne segue che la 4 è falsa e la 3 e 5 sono vere.

6. Sia $V = V_{\mathbb{R}}^n$ uno spazio vettoriale euclideo, sia $< \, , \, >$ il suo prodotto scalare e sia $T : V \to V$ un endomorfismo. Si ricordi che T si dice un *operatore antisimmetrico* se per tutti i vettori risulta

$$< T(\vec{v}), \vec{w} > = - < \vec{v}, T(\vec{w}) > .$$

Stabilire quali tra le seguenti affermazioni sono vere (anche più risposte):

$\boxed{1}$ Se T è un operatore antisimmetrico, ogni matrice A ad esso associata è antisimmetrica

$\boxed{\bowtie 2}$ Se T è un operatore antisimmetrico, esiste una matrice A ad esso associata che sia antisimmetrica

$\boxed{3}$ Un operatore antisimmetrico è necessariamente diagonalizzabile su $\mathbb{R}$

$\boxed{\bowtie 4}$ Se n è dispari, un'operatore antisimmetrico non può essere iniettivo

$\boxed{5}$ Nessuna delle precedenti

Similmente al caso simmetrico, la rappresentazione di un operatore antisimmetrico con una matrice antisimmetrica avviene solo con la scelta di una base ortonormale. Pertanto l'affermazione 2 è corretta e la 1 no. Come mostra l'esercizio precedente, una matrice antisimmetrica può non essere diagonalizzabile su $\mathbb{R}$. Inoltre, se n è dispari, risulta (come nell'esercizio precedente), $\det T = 0$, e dunque T non può essere iniettivo.