

Geometria (Corso di laurea in Fisica, Canali A-C e D-O)

Prof. Barucci e Piccini

9 luglio 2012

- a. Scrivere subito canale, cognome e nome.
- b. Utilizzare questi fogli per le risposte. I fogli protocollo distribuiti a parte sono invece per eventuali riflessioni o calcoli, e non vanno consegnati.
- c. Durante la prova non si possono consultare testi e appunti né usare fogli diversi da quelli distribuiti.
- d. Durante la prova non è consentito uscire dall'aula.

Tempo a disposizione: 2 ore

Canale.....Cognome.....Nome.....

1. Sia $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ l'endomorfismo tale che $T(x, y, z) = (-2x + y + z, x - 2y + z, x + y - 2z)$. Stabilire quali tra le seguenti affermazioni sono vere (eventualmente anche più risposte)

- 1 T è rappresentato rispetto alla base canonica da una matrice diagonale
- 2 T è diagonalizzabile
- 3 per ogni autovalore, la molteplicità algebrica coincide con la molteplicità geometrica
- 4 T ha tre autovalori distinti
- 5 $\text{Ker } T$ è un autospazio di T

2. Sia r la retta di \mathbb{R}^3 di equazioni

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ 2x - y = 0 \end{cases}$$

Stabilire quali tra le seguenti affermazioni sono vere (eventualmente anche più risposte)

- 1 Esiste un unico piano contenente la retta r e il punto $P = (3, 4, 0)$ ed ha equazione $4x - 3y = 0$
- 2 Non esiste alcun piano contenente la retta r e il punto $P = (3, 4, 0)$
- 3 Esistono infiniti piani contenenti la retta r e il punto $P = (3, 4, 0)$
- 4 Esistono infiniti piani contenenti la retta r e il punto $Q = (0, 0, -2)$
- 5 Esiste un unico piano contenente la retta r e il punto $Q = (0, 0, -2)$ ed ha equazione $x + 2y = 0$

3. Siano $\vec{v}_1 = (0, 1, 1, 0)$, $\vec{v}_2 = (1, 1, 1, 0)$, $\vec{v}_3 = (0, 1, 0, 0)$, $\vec{v}_4 = (1, 0, 1, 0) \in \mathbb{R}^4$. Siano inoltre $U = \text{Span}(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$ e $W = \text{Span}(\vec{v}_3, \vec{v}_4)$. Rispondere nei riquadri alle seguenti domande:

Estrarre da $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4\}$ una base per $\text{Span}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4)$:

Determinare $\dim(U + W) =$

Determinare $\dim(U \cap W) =$

4. Sia $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ (una matrice con m righe ed n colonne), e sia S una sua riduzione a scala. Stabilire quali tra le seguenti affermazioni sono vere (eventualmente anche più risposte)

- 1 $\text{Ker } A = \text{Ker } S$
- 2 $\dim \text{Ker } A = \dim \text{Ker } S$
- 3 $\text{Im } A = \text{Im } S$
- 4 $\dim \text{Im } A = \dim \text{Im } S$
- 5 $\text{Im } A$ è un sottospazio di \mathbb{R}^n e $\text{Ker } A$ è un sottospazio di \mathbb{R}^m
- 6 $\text{Im } A$ è un sottospazio di \mathbb{R}^m e $\text{Ker } A$ è un sottospazio di \mathbb{R}^n

5. Sia $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ la rotazione di un angolo π intorno all'asse x . Stabilire quali tra le seguenti affermazioni sono vere (eventualmente anche più risposte):

- 1 T non è un endomorfismo
- 2 T è un endomorfismo ma non è diagonalizzabile
- 3 T è un endomorfismo diagonalizzabile
- 4 esiste una base di \mathbb{R}^3 formata da autovettori di T
- 5 l'unico autovalore di T è 1

6. Sia $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ l'applicazione che associa a ogni numero complesso $a + ib$ il suo coniugato $a - ib$. Stabilire quali tra le seguenti affermazioni sono vere (eventualmente anche più risposte):

- 1 f è un'applicazione iniettiva ma non suriettiva
- 2 f è un'applicazione suriettiva ma non iniettiva
- 3 f è un'applicazione biiettiva
- 4 f è un'applicazione lineare di \mathbb{C} in \mathbb{C} come spazio vettoriale su se stesso
- 5 f è un'applicazione lineare di \mathbb{C} in \mathbb{C} come spazio vettoriale su \mathbb{R}

7. Sia $T : M_2(\mathbb{R}) \rightarrow M_2(\mathbb{R})$ l'applicazione lineare definita dalla formula:

$$T(A) = (A \cdot A^t),$$

essendo $M_2(\mathbb{R})$ lo spazio vettoriale delle matrici reali 2×2 , A^t la trasposta di A ed essendo \cdot il prodotto righe per colonne. Stabilire quali tra le seguenti affermazioni sono vere (anche più risposte):

- 1 T è lineare e il nucleo di T è costituito dalle matrici simmetriche
- 2 T è lineare e il nucleo di T è costituito dalle matrici antisimmetriche
- 3 T non è lineare ma è iniettiva
- 4 T non è lineare ma è suriettiva
- 5 Nessuna delle precedenti.

8. Si considerino nello spazio \mathbb{R}^3 i seguenti quattro vettori (necessariamente linearmente dipendenti $\vec{v}_1 = (1, 1, 1)$, $\vec{v}_2 = (1, 2, 2)$, $\vec{v}_3 = (0, -1, 1)$, $\vec{v}_4 = (3, 1, 1)$, Stabilire quali tra le seguenti affermazioni è vera:

- 1 ognuno tra i vettori $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4$ è combinazione lineare dei rimanenti
- 2 uno solo tra i vettori $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4$ è combinazione lineare dei rimanenti
- 3 due e non più di due tra i vettori $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4$ sono combinazioni lineari dei rimanenti
- 4 tre e non più di tre tra i vettori $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4$ sono combinazioni lineari dei rimanenti

9. Si considerino in $M_2(\mathbb{C})$ le seguenti matrici:

$$J_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad J_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

Stabilire quali tra le seguenti affermazioni sono vere (anche più risposte):

- 1 J_1, J_2, J_3 sono diagonalizzabili, ma hanno autovalori diversi
- 2 J_1, J_2, J_3 sono diagonalizzabili, e hanno gli stessi autovalori
- 3 J_1, J_2, J_3 non sono diagonalizzabili
- 4 J_1, J_2, J_3 sono matrici simili

10. Si consideri il sistema lineare a coefficienti reali:

$$\begin{cases} -x + 4y + 2z + 1 = 0 \\ 2x + 5y + 4z - 2 = 0 \\ 4x - 3y - 1 = 0 \end{cases}$$

e siano $\alpha, \alpha', \alpha''$ i tre piani di \mathbb{R}^3 rappresentati ordinatamente dalla prima, seconda e terza equazione.

Stabilire quale tra le seguenti affermazioni è vera:

- 1 $\alpha, \alpha', \alpha''$ sono paralleli
- 2 $\alpha, \alpha', \alpha''$ si intersecano in un punto
- 3 $\alpha, \alpha', \alpha''$ si intersecano in una retta, e appartengono quindi a uno stesso fascio
- 4 Nessuna delle precedenti.