Esercitazione di Geometria del 20.12.2012 (Corso di laurea in Fisica, Canale Cf-K; Prof. P. Piccinni)

1. Si consideri in $\mathbb{R}^3$ il piano $\alpha : x + z + 1 = 0$, essendo (x, y, z) le coordinate di $\mathbb{R}^3$. Stabilire quali tra le seguenti affermazioni sono vere (eventualmente anche più risposte):

   $\boxed{1}$ α è parallelo al piano xz

   $\boxed{2}$ α è parallelo all'asse y

   $\boxed{3}$ α è perpendicolare al piano xz

   $\boxed{4}$ α è perpendicolare all'asse y

2. Si consideri in $\mathbb{R}^3$ la retta r di equazioni cartesiane $x + 2z - 1 = 0,\ y + 4z - 3 = 0$, essendo (x, y, z) le coordinate di $\mathbb{R}^3$. Stabilire quali tra le seguenti affermazioni sono vere (eventualmente anche più risposte):

   $\boxed{1}$ r ha parametri direttori $(1, 2, 4)$

   $\boxed{2}$ r ha parametri direttori $(2, 4, 1)$

   $\boxed{3}$ r ha parametri direttori $(-2, -4, 1)$

   $\boxed{4}$ r è parallela al piano $2x + y + 8z - 1 = 0$

3. Si considerino in $\mathbb{R}^3$ le rette $r_1 : x-z-1 = 0,\ y-2z = 0$, $r_2 : x-3z-1 = 0,\ y-z = 0$, $r_3 : x+z-1 = 0,\ y+4 = 0$ essendo (x, y, z) le coordinate di $\mathbb{R}^3$. Stabilire quale tra le seguenti affermazioni ̀vera:

   $\boxed{1}$ Non vi sono relazioni di perpendicolarità tra r_1, r_2, r_3

   $\boxed{2}$ Le tre rette sono a due a due perpendicolari

   $\boxed{3}$ Solo due tra le rette r_1, r_2, r_3 sono perpendicolari ma esse non sono incidenti

   $\boxed{4}$ Solo due tra le rette r_1, r_2, r_3 sono perpendicolari ed esse sono anche incidenti

4. Si considerino le matrici $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

   Stabilire quali tra le seguenti affermazioni sono vere (eventualmente anche più risposte):

   $\boxed{1}$ $AB = BA$

   $\boxed{2}$ $B = A^{-1}$

   $\boxed{3}$ Gli autovalori di A e di B sono gli stessi

   $\boxed{4}$ Nessuna delle precedenti

5. Sia $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{C})$ una matrice complessa quadrata di ordine n, e sia $T(A) = \overline{A}$, dove $\overline{A} = (\overline{a}_{ij})$ è la matrice coniugata di A. T è un'operatore lineare, rispetto alla struttura di spazio vettoriale complesso di $M_n(\mathbb{C})$?

   $\boxed{1}$ Sì, per ogni n

   $\boxed{2}$ E' lineare solo per $n = 1$

   $\boxed{3}$ Non è mai lineare

6. Si consideri la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix}$. Stabilire quali tra le seguenti affermazioni sono vere (eventual-

mente anche più risposte):

$\boxed{1}$ A non ammette autovalori reali

$\boxed{2}$ A ammette autovalori reali ma non tutte la molteplicità algebriche coincidono con le molteplicità geometriche

$\boxed{3}$ A ammette autovalori reali non distinti, ma tutte la molt. algebriche coincidono con le molt. geometriche

$\boxed{4}$ A ammette tre autovalori reali distinti

$\boxed{5}$ A è diagonalizzabile

7. Sia $V = M_2(\mathbb{R})$ lo spazio vettoriale delle matrici quadrate di ordine 2 ad elementi reali. Sia
$$T : M_2(\mathbb{R}) \longrightarrow M_2(\mathbb{R})$$
l'applicazione lineare definita da $T(A) = A + A^t$, somma di A con la sua trasposta. Qual'è la matrice che rappresenta T nella base canonica $E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$?

$\boxed{1}$ $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$\boxed{2}$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\boxed{3}$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\boxed{4}$ $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

$\boxed{5}$ Nessuna delle precedenti

8. Sia $V = \mathbb{R}_{\leq 3}[x] = \{P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3\}$ lo spazio vettoriale dei polinomi di grado ≤ 3 a coefficienti reali, e sia $T : V \to V$ l'applicazione lineare (di derivata seconda) definita da definita da $T(P(x)) = P''(x)$, ovvero
$$T(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3) = 2a_2 + 6a_3x.$$
Stabilire quali tra le seguenti affermazioni sono vere (eventualmente anche più risposte):

$\boxed{1}$ T non ammette autovalori

$\boxed{2}$ T ammette solo l'autovalore $\lambda = 0$

$\boxed{3}$ T è diagonalizzabile

$\boxed{4}$ Nessuna delle precedenti

9. Sia $A \in M_3(\mathbb{R})$ una matrice reale quadrata di ordine 3 *invertibile*. Stabilire quali tra le seguenti affermazioni sono vere (eventualmente anche più risposte):

$\boxed{1}$ Gli autovalori di A sono necessariamente distinti

$\boxed{2}$ A è diagonalizzabile

$\boxed{3}$ A non può ammettere l'autovalore $\lambda = 0$

$\boxed{4}$ Nessuna delle precedenti