Esercitazione di Geometria del 26.10.2012 (Corso di laurea in Fisica, Canale Cf-K)
Prof. P. Piccinni

1. Si consideri il sistema lineare a coefficienti reali:

$$\begin{cases} kx - y + z = 0 \\ x - ky + z = 0 \\ x - y + kz = 0 \end{cases}$$

Stabilire quale tra le seguenti affermazioni è vera:

$\boxed{1}$ Il sistema ha solo la soluzione nulla per ogni k.

$\boxed{2}$ Il sistema ha infinite soluzioni per ogni k.

$\boxed{3}$ Nessuna delle precedenti.

2. Si consideri l'equazione $z^2 + 2iz - 1 = 0$, a coefficienti in $\mathbb{C}$. Stabilire quale tra le seguenti affermazioni è vera:

$\boxed{1}$ Le soluzioni sono $z_1 = i;\ z_2 = -i$

$\boxed{2}$ Le soluzioni sono $z_1 = z_2 = i$

$\boxed{3}$ Le soluzioni sono $z_1 = z_2 = -i$

$\boxed{4}$ Nessuna delle precedenti.

3. Si consideri l'equazione $z^3 = i$, $z \in \mathbb{C}$. Stabilire quale tra le seguenti affermazioni è vera:

$\boxed{1}$ Le soluzioni sono $z_1 = i;\ z_2, z_3 = \frac{1}{3} \pm \frac{i}{3}$

$\boxed{2}$ Le soluzioni sono $z_1 = -i;\ z_2, z_3 = \pm\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$

$\boxed{3}$ Le soluzioni sono $z_1 = -i;\ z_2, z_3 = \frac{\sqrt{3}}{2} \pm \frac{i}{2}$

$\boxed{4}$ Nessuna delle precedenti.

4. Sia $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$, sia $A\vec{x} = \vec{b}$ un sistema lineare in incognite $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix}$ e termini noti $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ b_m \end{pmatrix}$, e sia $A\vec{x} = \vec{0}$ il sistema lineare omogeneo associato. Dire quali tra le seguenti eventualità possono effettivamente presentarsi (eventualmente anche più risposte):

$\boxed{1}$ Il sistema $A\vec{x} = \vec{b}$ non ammette soluzioni ma l'omogeneo associato $A\vec{x} = \vec{0}$ ne ammette infinite.

$\boxed{2}$ Il sistema $A\vec{x} = \vec{b}$ ammette una sola soluzione ma l'omogeneo associato $A\vec{x} = \vec{0}$ ne ammette infinite.

$\boxed{3}$ Il sistema $A\vec{x} = \vec{b}$ ammette infinite soluzioni ma l'omogeneo associato $A\vec{x} = \vec{0}$ ammette solo la soluzione nulla.

$\boxed{4}$ Entrambi i sistemi $A\vec{x} = \vec{b}$ e $A\vec{x} = \vec{0}$ ammettono una sola soluzione.

5. Trovare tra le seguenti matrici quelle che sono l'una l'inversa dell'altra (e unire con una freccia doppia i rispettivi riquadri):

$\boxed{1}$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

$\boxed{2}$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$

$\boxed{3}$ $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$

6. Sia $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{pmatrix}$, con $a, b, c \in \mathbb{R}^* = \mathbb{R} - 0$. Stabilire quali tra le seguenti affermazioni sono vere (anche più risposte):

$\boxed{1}$ esistono scelte di $a, b, c \in \mathbb{R}^*$ tali che il rango di A è 1

$\boxed{2}$ esistono scelte di $a, b, c \in \mathbb{R}^*$ tali che il rango di A è 2

$\boxed{3}$ esistono scelte di $a, b, c \in \mathbb{R}^*$ tali che il rango di A è 3

7. Sia $A_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$, con $\theta \in [0, 2\pi)$. Stabilire quali tra le seguenti affermazioni sono vere (anche più risposte):

$\boxed{1}$ per qualche $\theta \in [0, 2\pi)$ esiste un vettore $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2, \vec{x} \neq \vec{0}$, con $A_\theta \vec{x} = \vec{x}$

$\boxed{2}$ per qualche $\theta \in [0, 2\pi)$ esiste un vettore $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2, \vec{x} \neq \vec{0}$, con $A_\theta \vec{x} = -\vec{x}$

$\boxed{3}$ per qualche $\theta \in [0, 2\pi)$ esiste un vettore $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2, \vec{x} \neq \vec{0}$, con $A_\theta \vec{x} = \vec{0}$

$\boxed{4}$ Nessuna delle precedenti.

8. Si considerino le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Stabilire quale tra le seguenti affermazioni è vera:

$\boxed{1}$ Le matrici A e B non sono invertibli.

$\boxed{2}$ A e B sono invertibli e $B = A^{-1}$

$\boxed{3}$ A e B sono invertibli e $B = -A^{-1}$

$\boxed{4}$ A e B sono invertibli e $B \neq \pm A^{-1}$

9. Sia $A \in M_n(\mathbb{R})$ e sia $\lambda \in \mathbb{R}$. Stabilire quale tra le seguenti affermazioni è vera

$\boxed{1}$ $\det(\lambda A) = \lambda \det A$

$\boxed{2}$ $\det(\lambda A) = \lambda^n \det A$

$\boxed{3}$ $\det(\lambda A) = (-1)^n \lambda \det A$

$\boxed{4}$ $\det(\lambda A) = (-1)^n \lambda^n \det A$

$\boxed{5}$ Nessuna delle precedenti