Soluzioni dell'esercitazione di Geometria del 20.12.2012 (Corso di laurea in Fisica, Canale Cf-K; Prof. P. Piccinni)

1. Si consideri in $\mathbb{R}^3$ il piano $\alpha : x + z + 1 = 0$, essendo (x, y, z) le coordinate di $\mathbb{R}^3$. Stabilire quali tra le seguenti affermazioni sono vere (eventualmente anche più risposte):

   $\boxed{1}$ α è parallelo al piano xz

   $\boxed{\bowtie 2}$ α è parallelo all'asse y

   $\boxed{\bowtie 3}$ α è perpendicolare al piano xz

   $\boxed{4}$ α è perpendicolare all'asse y

   Infatti i coefficienti dell'equazione di α sono le componenti del vettore $\vec{v} = (1, 0, 1)$, che è parallelo all'asse y e perpendicolare al piano xz.

2. Si consideri in $\mathbb{R}^3$ la retta r di equazioni cartesiane $x + 2z - 1 = 0,\ y + 4z - 3 = 0$, essendo (x, y, z) le coordinate di $\mathbb{R}^3$. Stabilire quali tra le seguenti affermazioni sono vere (eventualmente anche più risposte):

   $\boxed{1}$ r ha parametri direttori $(1, 2, 4)$

   $\boxed{2}$ r ha parametri direttori $(2, 4, 1)$

   $\boxed{\bowtie 3}$ r ha parametri direttori $(-2, -4, 1)$

   $\boxed{\bowtie 4}$ r è parallela al piano $2x + y + 8z - 1 = 0$

   I parametri direttori di r sono i minori a segni alterni della matrice dei coefficienti delle sue equazioni. La risposta corretta è pertanto la 3. E' corretta anche la 4, in virtù della condizione di parallelismo tra retta e piano $(al + bm + cn = 0)$.

3. Si considerino in $\mathbb{R}^3$ le rette $r_1 : x-z-1 = 0,\ y-2z = 0$, $r_2 : x-3z-1 = 0,\ y-z = 0$, $r_3 : x+z-1 = 0,\ y+4 = 0$ essendo (x, y, z) le coordinate di $\mathbb{R}^3$. Stabilire quale tra le seguenti affermazioni ̀vera:

   $\boxed{1}$ Non vi sono relazioni di perpendicolarità tra r_1, r_2, r_3

   $\boxed{2}$ Le tre rette sono a due a due perpendicolari

   $\boxed{\bowtie 3}$ Solo due tra le rette r_1, r_2, r_3 sono perpendicolari ma esse non sono incidenti

   $\boxed{4}$ Solo due tra le rette r_1, r_2, r_3 sono perpendicolari ed esse sono anche incidenti

   Vettori direttori delle tre rette sono risp. $\vec{v}_1 = (1, 2, 1), \vec{v}_2 = (3, 0, 1), \vec{v}_3 = (-1, 0, 1)$, e si ottengono p. es. osservando che le equazioni assegnate sono per le tre rette del tipo $x = lz + p, y = mz + q$ (equazioni ridotte). Usando l'espressione analitica del prodotto scalare, ne segue che tra le tre rette solo r_1 e r_3 sono perpedicolari. Esse tuttavia non sono incidenti: il sistema delle loro quattro equazioni non ha infatti soluzione.

4. Si considerino le matrici $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

   Stabilire quali tra le seguenti affermazioni sono vere (eventualmente anche più risposte):

   $\boxed{1}$ $AB = BA$

   $\boxed{2}$ $B = A^{-1}$

   $\boxed{\bowtie 3}$ Gli autovalori di A e di B sono gli stessi

   $\boxed{4}$ Nessuna delle precedenti

   1 e 2 sono falsi per verifica diretta. Dai polinomi caratteristici appare che sia A che B ammettono solo l'autovalore 1, in entrambi i casi con molteplicità algebrica 2.

5. Sia $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{C})$ una matrice complessa quadrata di ordine n, e sia $T(A) = \overline{A}$, dove $\overline{A} = (\overline{a}_{ij})$ è la matrice coniugata di A. T è un'operatore lineare, rispetto alla struttura di spazio vettoriale complesso di $M_n(\mathbb{C})$?

$\boxed{1}$ Sì, per ogni n

$\boxed{2}$ E' lineare solo per $n = 1$

$\boxed{\bowtie 3}$ Non è mai lineare

Se $\lambda \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$, risulta infatti

$$T(\lambda A) = (\overline{\lambda a_{ij}}) = (\overline{\lambda}\overline{a_{ij}}) \neq (\lambda \overline{a_{ij}}) = \lambda T(A).$$

6. Si consideri la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix}$. Stabilire quali tra le seguenti affermazioni sono vere (eventualmente anche più risposte):

$\boxed{1}$ A non ammette autovalori reali

$\boxed{2}$ A ammette autovalori reali ma non tutte la molteplicità algebriche coincidono con le molteplicità geometriche

$\boxed{3}$ A ammette autovalori reali non distinti, ma tutte la molt. algebriche coincidono con le molt. geometriche

$\boxed{\bowtie 4}$ A ammette tre autovalori reali distinti

$\boxed{5}$ A è diagonalizzabile

Basta scrivere e risolvere l'equazione caratteristica. E' facile, poiché un autovalore è zero.

7. Sia $V = M_2(\mathbb{R})$ lo spazio vettoriale delle matrici quadrate di ordine 2 ad elementi reali. Sia

$$T : M_2(\mathbb{R}) \longrightarrow M_2(\mathbb{R})$$

l'applicazione lineare definita da $T(A) = A + A^t$, somma di A con la sua trasposta. Qual'è la matrice che rappresenta T nella base canonica $E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$?

$\boxed{1}$ $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$\boxed{2}$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\boxed{3}$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\boxed{\bowtie 4}$ $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

$\boxed{5}$ Nessuna delle precedenti

Lo spazio $V = M_2(\mathbb{R})$ ha dimensione 4 e dunque la matrice è 4×4: la risposta segue dalla definizione della matrice associata: basta infatti vedere come opera T sulle quattro matrici $E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}$, che ne costituiscono la base canonica.

8. Sia $V = \mathbb{R}_{\leq 3}[x] = \{P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3\}$ lo spazio vettoriale dei polinomi di grado ≤ 3 a coefficienti reali, e sia $T : V \to V$ l'applicazione lineare (di derivata seconda) definita da definita da $T(P(x)) = P''(x)$, ovvero

$$T(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3) = 2a_2 + 6a_3x.$$

Stabilire quali tra le seguenti affermazioni sono vere (eventualmente anche più risposte):

$\boxed{1}$ T non ammette autovalori

$\boxed{\bowtie 2}$ T ammette solo l'autovalore $\lambda = 0$

$\boxed{3}$ T è diagonalizzabile

$\boxed{4}$ Nessuna delle precedenti

I soli polinomi proporzionali alla loro derivata seconda sono i polinomi di primo grado, e per essi la costante di proporzionalità è zero.

9. Sia $A \in M_3(\mathbb{R})$ una matrice reale quadrata di ordine 3 *invertibile*. Stabilire quali tra le seguenti affermazioni sono vere (eventualmente anche più risposte):

$\boxed{1}$ Gli autovalori di A sono necessariamente distinti

$\boxed{2}$ A è diagonalizzabile

$\boxed{\bowtie 3}$ A non può ammettere l'autovalore $\lambda = 0$

$\boxed{4}$ Nessuna delle precedenti

Controesempi alla validità di 1 e di 2 sono rispettivamente la matrice identica e la matrice di rotazione sul piano xy. D'altra parte una matrice invertibile, pensata come endomorfismo, ha certamente nucleo ridotto al solo vettore nullo, e non può quindi ammettere l'autovalore nullo.