Primo esonero di Geometria, 23.11.2012 (Corso di laurea in Fisica, Canale Cf-K, Prof. P. Piccinni)

a. Scrivere subito canale, cognome e nome.
b. Utilizzare questi fogli per le risposte. I fogli protocollo non invece vanno consegnati.
c. Durante la prova non si possono consultare testi e appunti né usare fogli diversi da quelli distribuiti.
d. Durante la prova non è consentito uscire dall'aula.

Tempo a disposizione: 2 ore

Matricola............................**Cognome**...**Nome**...

1. Si consideri il sistema lineare:

$$\begin{cases} kx - y = & 1 \\ x + y = & 0 \end{cases}$$

essendo k un parametro **reale**. Stabilire quale tra le seguenti affermazioni è vera:

$\boxed{1}$ Il sistema ammette un'unica soluzione per ogni k
$\boxed{2}$ Il sistema ammette infinite soluzioni per ogni k
$\boxed{3}$ Il sistema ammette un'unica soluzione per ogni $k \neq 1$ e infinite soluzioni per $k = 1$
$\boxed{4}$ Il sistema ammette infinite soluzioni per ogni $k \neq 1$ e non ammette soluzioni per $k = 1$
$\boxed{5}$ Il sistema ammette un'unica soluzione per ogni $k \neq -1$ e infinite soluzioni per $k = -1$
$\boxed{6}$ Il sistema ammette infinite soluzioni per ogni $k \neq -1$ e non ammette soluzioni per $k = -1$
$\boxed{7}$ Nessuna delle precedenti

2. Si consideri il sistema lineare:

$$\begin{cases} kx - y = & i \\ x + ky = & 1 \end{cases}$$

essendo k un parametro **complesso**. Stabilire quale tra le seguenti affermazioni è vera:

$\boxed{1}$ Il sistema ammette un'unica soluzione per ogni k
$\boxed{2}$ Il sistema ammette infinite soluzioni per ogni k
$\boxed{3}$ Il sistema ammette un'unica soluzione per ogni $k \neq \pm i$ e infinite soluzioni per $k = \pm i$
$\boxed{4}$ Il sistema ammette infinite soluzioni per ogni $k \neq \pm i$ e non ammette soluzioni per $k = \pm i$
$\boxed{5}$ Il sistema ammette un'unica soluzione per ogni $k \neq i$ e infinite soluzioni per $k = i$
$\boxed{6}$ Il sistema ammette infinite soluzioni per ogni $k \neq i$ e non ammette soluzioni per $k = i$
$\boxed{7}$ Nessuna delle precedenti

3. Si consideri la matrice ad elementi reali:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 9 & 8 & 7 & 6 & 5 \\ k & k & k & k & k \end{pmatrix}$$

Stabilire quale tra le seguenti affermazioni è vera:

$\boxed{1}$ $rg\ A = 5$ per ogni $k \neq 0$ e $rg\ A = 4$ per $k = 0$
$\boxed{2}$ $rg\ A = 4$ per ogni k
$\boxed{3}$ $rg\ A = 4$ per ogni $k \neq 0$ e $rg\ A = 3$ per $k = 0$
$\boxed{4}$ $rg\ A = 3$ per ogni k
$\boxed{5}$ $rg\ A = 3$ per ogni $k \neq 0$ e $rg\ A = 2$ per $k = 0$
$\boxed{6}$ $rg\ A = 2$ per ogni k
$\boxed{7}$ $rg\ A = 2$ per ogni $k \neq 0$ e $rg\ A = 1$ per $k = 0$
$\boxed{8}$ Nessuna delle precedenti

4. Sia $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 = 0$ un'equazione di terzo grado con coefficienti in $a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$. Si ricordi che, per il teorema fondamentale dell'algebra $p(x) = 0$ ammette tre soluzioni $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ (non necessariamente distinte). Stabilire quale tra le seguenti affermazioni è vera.

$\boxed{1}$ Poiché i coefficienti di $p(x)$ sono reali, risulta $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{R}$
$\boxed{2}$ Poiché i coefficienti di $p(x)$ sono reali, almeno due tra z_1, z_2, z_3 sono reali
$\boxed{3}$ Poiché i coefficienti di $p(x)$ sono reali, almeno una tra z_1, z_2, z_3 è reale
$\boxed{4}$ Nessuna delle precedenti

5. Si consideri lo spazio vettoriale $M_n(\mathbb{R})$ delle matrici quadrate di ordine n ad elementi reali. Stabilire quali tra i seguenti sottoinsiemi costituiscono sottospazi vettoriali (eventualmente anche più risposte)

- $\boxed{1}$ Il sottoinsieme delle $A \in M_n(\mathbb{R})$ invertibili
- $\boxed{2}$ Il sottoinsieme delle $A \in M_n(\mathbb{R})$ di rango 2
- $\boxed{3}$ Il sottoinsieme delle $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ diagonali: $a_{ij} = 0$ se $i \neq j$
- $\boxed{4}$ Il sottoinsieme delle $A \in M_n(\mathbb{R})$ tali che $\det A = 1$
- $\boxed{5}$ Il sottoinsieme delle $A \in M_n(\mathbb{R})$ tali che $\det A = 0$
- $\boxed{6}$ Nessuno delle precedenti

6. Siano $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ invertibili, siano A^t, B^t le loro trasposte e A^{-1}, B^{-1} le loro inverse. Stabilire quali tra le seguenti affermazioni sono corrette (anche più risposte)

- $\boxed{1}$ $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t,\ (B^t)^{-1} = (B^{-1})^t$
- $\boxed{2}$ $((AB)^t)^{-1} = (A^t)^{-1}(B^t)^{-1}$
- $\boxed{3}$ $AB^t = BA^t$
- $\boxed{4}$ $AA^t = BB^t \Rightarrow A = B$
- $\boxed{5}$ Nessuna delle precedenti

7. Sia $V = \{p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2; a_i \in \mathbb{R}\}$ lo spazio vettoriale dei polinomi di grado ≤ 2 a coefficienti reali, e si consideri il sottoinsieme

$$W = \{p(x) \in V \text{ tali che } p(1) = p(2) = 0\}.$$

Stabilire quale tra le seguenti affermazioni è vera:

- $\boxed{1}$ W è un sottospazio vettoriale di dimensione 3 di V
- $\boxed{2}$ W è un sottospazio vettoriale di dimensione 2 di V
- $\boxed{3}$ W è un sottospazio vettoriale di dimensione 1 di V
- $\boxed{4}$ W non è un sottospazio vettoriale di V

8. Si consideri il piano affine α di $\mathbb{R}^3$ passante per i punti $A = (1, 1, 0),\ B = (1, 0, 2),\ C = (0, 1, 2)$. Stabilire quali tra le seguenti affermazioni sono vere (anche più risposte):

- $\boxed{1}$ α è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$
- $\boxed{2}$ α ha equazione cartesiana $x + y + 2z = 2$
- $\boxed{3}$ α ha equazione cartesiana $2x + 2y + z = 2$
- $\boxed{4}$ α ha equazione cartesiana $2x + 2y + z = 4$
- $\boxed{5}$ Nessuna delle precedenti.

9. Si considerino le rette affini r_1, r_2, r_3 di $\mathbb{R}^3$ lati del triangolo di vertici i punti $A = (1, 1, 0),\ B = (1, 0, 2),\ C = (0, 1, 2)$. Stabilire quali tra le seguenti affermazioni sono vere (anche più risposte):

- $\boxed{1}$ i parametri direttori di r_1, r_2, r_3 sono linearmente dipendenti
- $\boxed{2}$ l'area del triangolo ABC coincide con il modulo del prodotto vettoriale $\vec{AB} \wedge \vec{AC}$
- $\boxed{3}$ l'area del triangolo ABC è $\frac{3}{2}$
- $\boxed{4}$ Nessuna delle precedenti.

10. Sia $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$, sia $A\vec{x} = \vec{b}$ un sistema lineare in incognite $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ . \\ x_n \end{pmatrix}$ e termini noti $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ . \\ b_m \end{pmatrix}$, e sia $A\vec{x} = \vec{0}$ il sistema lineare omogeneo associato. Dire quali tra le seguenti eventualità possono effettivamente presentarsi (eventualmente anche più risposte):

- $\boxed{1}$ Il sistema $A\vec{x} = \vec{b}$ ammette soluzioni ma l'omogeneo associato $A\vec{x} = \vec{0}$ non ne ammette.
- $\boxed{2}$ Il sistema $A\vec{x} = \vec{b}$ non ammette soluzioni ma l'omogeneo associato $A\vec{x} = \vec{0}$ ne ammette.
- $\boxed{3}$ Il sistema $A\vec{x} = \vec{b}$ ammette infinite soluzioni ma l'omogeneo associato $A\vec{x} = \vec{0}$ ne ammette una sola.
- $\boxed{4}$ Il sistema $A\vec{x} = \vec{b}$ ammette una sola soluzione ma l'omogeneo associato $A\vec{x} = \vec{0}$ ne ammette infinite.
- $\boxed{5}$ Entrambi i sistemi $A\vec{x} = \vec{b}$ e $A\vec{x} = \vec{0}$ ammettono una sola soluzione.