Primo esonero di Geometria, 23.11.2012 (Corso di laurea in Fisica, Canale Cf-K, Prof. P. Piccinni)

1. Si consideri il sistema lineare:

$$\begin{cases} kx - y = & 1 \\ x + y = & 0 \end{cases}$$

essendo k un parametro **reale**. Stabilire quale tra le seguenti affermazioni è vera:

1	Il sistema ammette un'unica soluzione per ogni k
2	Il sistema ammette infinite soluzioni per ogni k
3	Il sistema ammette un'unica soluzione per ogni $k \neq 1$ e infinite soluzioni per $k = 1$
4	Il sistema ammette infinite soluzioni per ogni $k \neq 1$ e non ammette soluzioni per $k = 1$
5	Il sistema ammette un'unica soluzione per ogni $k \neq -1$ e infinite soluzioni per $k = -1$
6	Il sistema ammette infinite soluzioni per ogni $k \neq -1$ e non ammette soluzioni per $k = -1$
$\bowtie$ 7	Nessuna delle precedenti

Soluzione. Il determinante dei coefficienti del sistema è $k + 1$. Esso pertanto è non nullo per $k \neq -1$ e per tali valori il sistema ha una sola soluzione. Per $k = -1$ invece il sistema si riduce a

$$\begin{cases} -x - y = & 1 \\ x + y = & 0 \end{cases}$$

sistema chiaramente privo di soluzioni.

2. Si consideri il sistema lineare:

$$\begin{cases} kx - y = & i \\ x + ky = & 1 \end{cases}$$

essendo k un parametro **complesso**. Stabilire quale tra le seguenti affermazioni è vera:

1	Il sistema ammette un'unica soluzione per ogni k
2	Il sistema ammette infinite soluzioni per ogni k
3	Il sistema ammette un'unica soluzione per ogni $k \neq \pm i$ e infinite soluzioni per $k = \pm i$
4	Il sistema ammette infinite soluzioni per ogni $k \neq \pm i$ e non ammette soluzioni per $k = \pm i$
5	Il sistema ammette un'unica soluzione per ogni $k \neq i$ e infinite soluzioni per $k = i$
6	Il sistema ammette infinite soluzioni per ogni $k \neq i$ e non ammette soluzioni per $k = i$
$\bowtie$ 7	Nessuna delle precedenti

Soluzione. Il determinante dei coefficienti del sistema è $k^2 + 1$. Esso pertanto è non nullo per $k \neq \pm i$ e per tali valori il sistema ha una sola soluzione. Per $k = -i$ e per $k = -i$ invece il sistema si riduce rispettivamente ai due sistemi

$$\begin{cases} ix - y = & i \\ x + iy = & 1 \end{cases} \qquad \text{e} \qquad \begin{cases} -ix - y = & i \\ x - iy = & 1 \end{cases}$$

Nel primo sistema, la seconda equazione è ottenuta dalla prima moltiplicandola per $-i$: Il primo sistema ammette quindi infinite soluzioni. Nel secondo sistema, invece, il rango della matrice completa è 2. Ne segue che il secondo sistema non ammette soluzioni.

3. Si consideri la matrice ad elementi reali:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 9 & 8 & 7 & 6 & 5 \\ k & k & k & k & k \end{pmatrix}$$

Stabilire quale tra le seguenti affermazioni è vera:

1	$rg\ A = 5$ per ogni $k \neq 0$ e $rg\ A = 4$ per $k = 0$
2	$rg\ A = 4$ per ogni k
3	$rg\ A = 4$ per ogni $k \neq 0$ e $rg\ A = 3$ per $k = 0$
4	$rg\ A = 3$ per ogni k
5	$rg\ A = 3$ per ogni $k \neq 0$ e $rg\ A = 2$ per $k = 0$
$\bowtie$ 6	$rg\ A = 2$ per ogni k
7	$rg\ A = 2$ per ogni $k \neq 0$ e $rg\ A = 1$ per $k = 0$
8	Nessuna delle precedenti

Soluzione. La seguente matrice A' è ottenuta da A sostituendo ai suoi vettori riga risp. $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3, \vec{r}_4, \vec{r}_5$ i seguenti nuovi vettori riga: $\vec{r}'_1 = \vec{r}_1$, $\vec{r}'_2 = \vec{r}_2 + \vec{r}_1$, $\vec{r}'_3 = \vec{r}_3 - \vec{r}_1$, $\vec{r}'_4 = \vec{r}_4 + \vec{r}_1$, $\vec{r}'_5 = \vec{r}_5$:

$$A' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 9 & 9 & 9 & 9 & 9 \\ k & k & k & k & k \end{pmatrix}.$$

E' chiaro che Span $(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3, \vec{r}_4, \vec{r}_5) =$ Span $(\vec{r}'_1, \vec{r}'_2, \vec{r}'_3, \vec{r}'_4, \vec{r}'_5)$. Dunque il rango di A, massimo numero di sue righe linearmernte indipendenti, è uguale a quello di A'. Ma A' ha quattro righe proporzionali per ogni k. Ne segue che $rg\ A = \ rg\ A' = 2$ per ogni k.

4. Sia $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 = 0$ un'equazione di terzo grado con coefficienti in $a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$. Si ricordi che, per il teorema fondamentale dell'algebra $p(x) = 0$ ammette tre soluzioni $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ (non necessariamente distinte). Stabilire quale tra le seguenti affermazioni è vera.

   - $\boxed{1}$ Poiché i coefficienti di $p(x)$ sono reali, risulta $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{R}$
   - $\boxed{2}$ Poiché i coefficienti di $p(x)$ sono reali, almeno due tra z_1, z_2, z_3 sono reali
   - $\boxed{\bowtie 3}$ Poiché i coefficienti di $p(x)$ sono reali, almeno una tra z_1, z_2, z_3 è reale
   - $\boxed{4}$ Nessuna delle precedenti

   Soluzione. Se $z \in \mathbb{C}$ è soluzione, e se $\bar{z}$ è il suo coniugato, risulta $a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 = 0$, e quindi anche $a_0 + a_1 \bar{z} + a_2 \bar{z}^2 + a_3 \bar{z}^3 = \overline{a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3} = \bar{0} = 0$, dove nella prima uguaglianza si sono usati la distributività dfel coniugio per somma e prodotto e il fatto che i coefficienti sono reali. Dunque le soluzioni sono a coppie coniugate e ne segue che una almeno è reale.

5. Si consideri lo spazio vettoriale $M_n(\mathbb{R})$ delle matrici quadrate di ordine n ad elementi reali. Stabilire quali tra i seguenti sottoinsiemi costituiscono sottospazi vettoriali (eventualmente anche più risposte)

   - $\boxed{1}$ Il sottoinsieme delle $A \in M_n(\mathbb{R})$ invertibili
   - $\boxed{2}$ Il sottoinsieme delle $A \in M_n(\mathbb{R})$ di rango 2
   - $\boxed{\bowtie 3}$ Il sottoinsieme delle $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ diagonali: $a_{ij} = 0$ se $i \neq j$
   - $\boxed{4}$ Il sottoinsieme delle $A \in M_n(\mathbb{R})$ tali che $\det A = 1$
   - $\boxed{5}$ Il sottoinsieme delle $A \in M_n(\mathbb{R})$ tali che $\det A = 0$
   - $\boxed{6}$ Nessuno delle precedenti

   Soluzione. Per quanto riguarda le risposte 1,2,4 si osservi che la matrice nulla non è invertibile, non ha rango 2 e non ha determinante 1. Dunque gli insiemi descritti in 1,2,4, non contenendo il vettore nullo, non sono sottospazi vettoriali. Non lo è neanche l'insieme descritto al punto 5: infatti la somma di due matrici ha determinante nullo può avere determinante non nullo, un esempio essendo la somma delle seguenti matrici 1×1: $A = (1)$ e $B = (-1)$. Invece le matrici diagonali costituiscono un sottospazio vettoriale di $M_n(\mathbb{R})$, descritto dalle $n^2 - n$ equazioni lineari omogenee $a_{ij} = 0$ se $i \neq j$, e d'altra parte la somma di matrici diagonali è diagonale e prodotto di uno scalare per una matrice diagonale è diagonale.

6. Siano $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ invertibili, siano A^t, B^t le loro trasposte e A^{-1}, B^{-1} le loro inverse. Stabilire quali tra le seguenti affermazioni sono corrette (anche più risposte)

   - $\boxed{\bowtie 1}$ $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$, $(B^t)^{-1} = (B^{-1})^t$
   - $\boxed{\bowtie 2}$ $((AB)^t)^{-1} = (A^t)^{-1}(B^t)^{-1}$
   - $\boxed{3}$ $AB^t = BA^t$
   - $\boxed{4}$ $AA^t = BB^t \Rightarrow A = B$
   - $\boxed{5}$ Nessuna delle precedenti

   Soluzione. La risposta 1 è esatta per l'intercambiabilità della trasposizione e del calcolo dei cofattori nell'algoritmo per la scrittura dell'inversa. Anche la risposta 2 è esatta: infatti sia la trasposta che l'inversa del prodotto si scrivono come prodotto delle trasposte o dell'inverse, ma scambiando i fattori del prodotto. La risposta 3 invece è errata, un controesempio essendo la coppia $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Anche la risposta 4 è errata, l'uguaglianza essendo soddisfatta per esempio da ogni coppia A, B di matrici ortogonali.

7. Sia $V = \{p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2; a_i \in \mathbb{R}\}$ lo spazio vettoriale dei polinomi di grado ≤ 2 a coefficienti reali, e si consideri il sottoinsieme

$$W = \{p(x) \in V \text{ tali che } p(1) = p(2) = 0\}.$$

Stabilire quale tra le seguenti affermazioni è vera:

1	W è un sottospazio vettoriale di dimensione 3 di V
2	W è un sottospazio vettoriale di dimensione 2 di V
$\bowtie$ 3	W è un sottospazio vettoriale di dimensione 1 di V
4	W non è un sottospazio vettoriale di V

Soluzione. W è definito dal sistema lineare omogeneo $a_0 + a_1 + a_2 = 0,\ a_0 + 2a_1 + 4a_2 = 0$, che si ottiene esplicitando le due condizioni $p(1) = p(2) = 0$. La matrice dei coefficienti di tale sistema in tre incognite ha rango 2, e dunque lo spazio W delle soluzioni ha dimensione 1.

8. Si consideri il piano affine α di $\mathbb{R}^3$ passante per i punti $A = (1, 1, 0),\ B = (1, 0, 2),\ C = (0, 1, 2)$. Stabilire quali tra le seguenti affermazioni sono vere (anche più risposte):

1	α è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$
2	α ha equazione cartesiana $x + y + 2z = 2$
3	α ha equazione cartesiana $2x + 2y + z = 2$
$\bowtie$ 4	α ha equazione cartesiana $2x + 2y + z = 4$
5	Nessuna delle precedenti.

Soluzione. Per sostituzione delle coordinate dei punti nelle equazioni proposte, si vede subito che la risposta corretta è la numero 4.

9. Si considerino le rette affini r_1, r_2, r_3 di $\mathbb{R}^3$ lati del triangolo di vertici i punti $A = (1, 1, 0),\ B = (1, 0, 2),\ C = (0, 1, 2)$. Stabilire quali tra le seguenti affermazioni sono vere (anche più risposte):

$\bowtie$ 1	i parametri direttori di r_1, r_2, r_3 sono linearmente dipendenti
2	l'area del triangolo ABC coincide con il modulo del prodotto vettoriale $\vec{AB} \wedge \vec{AC}$
$\bowtie$ 3	l'area del triangolo ABC è $\frac{3}{2}$
4	Nessuna delle precedenti.

Soluzione. Dato che r_1, r_2, r_3 sono rette complanari, i loro parametri direttori sono certo linearmente dipendenti. L'area del triangolo ABC è $1/2$ del modulo del prodotto vettoriale $\vec{AB} \wedge \vec{AC}$. Risulta $\vec{AB} = (0, -1, 2)$, $\vec{AC} = (-1, 0, 2)$, e dunque $\vec{AB} \wedge \vec{AC} = (-2, -2, -1)$. Pertanto $|\vec{AB} \wedge \vec{AC}| = 3$ e l'area è $\frac{3}{2}$.

10. Sia $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$, sia $A\vec{x} = \vec{b}$ un sistema lineare in incognite $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ . \\ x_n \end{pmatrix}$ e termini noti $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ . \\ b_m \end{pmatrix}$, e sia $A\vec{x} = \vec{0}$ il sistema lineare omogeneo associato. Dire quali tra le seguenti eventualità possono effettivamente presentarsi (eventualmente anche più risposte):

1	Il sistema $A\vec{x} = \vec{b}$ ammette soluzioni ma l'omogeneo associato $A\vec{x} = \vec{0}$ non ne ammette.
$\bowtie$ 2	Il sistema $A\vec{x} = \vec{b}$ non ammette soluzioni ma l'omogeneo associato $A\vec{x} = \vec{0}$ ne ammette.
3	Il sistema $A\vec{x} = \vec{b}$ ammette infinite soluzioni ma l'omogeneo associato $A\vec{x} = \vec{0}$ ne ammette una sola.
4	Il sistema $A\vec{x} = \vec{b}$ ammette una sola soluzione ma l'omogeneo associato $A\vec{x} = \vec{0}$ ne ammette infinite.
$\bowtie$ 5	Entrambi i sistemi $A\vec{x} = \vec{b}$ e $A\vec{x} = \vec{0}$ ammettono una sola soluzione.

Soluzione. Le eventualità 1,3,4 sono escluse dal teorema di Rouché Capelli applicato ai due sistemi. L'eventualità 2 è invece possibile, quando il rango della matrice dei coefficienti è minore del rango della matrice dei coefficienti e temini noti. L'eventualità 5 è anche possibile, e si presenta quando entrambi ranghi delle due matrici sono entrambi n.