

Secondo esonero di Geometria per Fisica, a.a. 2012-13, lettere Cf-K (Prof. P. Piccini)

25 gennaio 2013

- Scrivere subito Matricola, Cognome, Nome e Preferenza per orale al primo o secondo appello.
- Utilizzare questi fogli per le risposte. I fogli protocollo distribuiti a parte sono invece per eventuali riflessioni o calcoli, e non vanno consegnati.
- Durante la prova non si possono consultare testi e appunti né usare fogli diversi da quelli distribuiti.
- Durante la prova non è consentito uscire dall'aula.

Tempo a disposizione: 2 ore

Matricola.....Cognome.....Nome.....

Preferenza per la prova orale : *Primo appello* *Secondo appello*

1. Si considerino nello spazio euclideo \mathbb{R}^3 le rette $r : x = 2z + 3, y = z + 4$ e $s : x = 4z + 6, y = 2z + 8$, essendo (x, y, z) le coordinate cartesiane di \mathbb{R}^3 . Stabilire quali tra le seguenti affermazioni sono vere (eventualmente anche più risposte):

- | | |
|---|-------------------------------|
| 1 | r e s sono incidenti |
| 2 | r e s sono coincidenti |
| 3 | r e s sono parallele |
| 4 | r e s sono sghembe |
| 5 | r e s sono perpendicolari |

2. Si considerino nello spazio euclideo \mathbb{R}^3 i piani $\alpha_1 : x - y = 0, \alpha_2 : x - z = 0$ e $\alpha_3 : y - z = 0$, essendo (x, y, z) le coordinate cartesiane di \mathbb{R}^3 . Stabilire quali tra le seguenti affermazioni sono vere (eventualmente anche più risposte):

- | | |
|---|---|
| 1 | $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ sono a due a due perpendicolari |
| 2 | $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ sono paralleli |
| 3 | $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ appartengono ad uno stesso fascio di piani |
| 4 | $\alpha_1 \cap \alpha_2 \cap \alpha_3$ è un punto |

3. Siano $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ e assumiamo che gli autovalori di A siano tutti distinti e coincidano con gli autovalori di B . Stabilire quali tra le seguenti affermazioni sono vere (anche più risposte):

- | | |
|---|--|
| 1 | A e B sono diagonalizzabili |
| 2 | A e B sono matrici simili |
| 3 | A e B hanno lo stesso determinante |
| 4 | Nessuna delle precedenti |

4. Siano $A, B \in M_2(\mathbb{R})$ e supponiamo che $\text{tr } A = \text{tr } B$ e $\det A = \det B$. Stabilire quali tra le seguenti affermazioni sono vere (anche più risposte):

- | | |
|---|--|
| 1 | A e B hanno gli stessi autovalori |
| 2 | A e B hanno gli stessi autovalori con le stesse molteplicità algebriche |
| 3 | A e B hanno gli stessi autovalori con le stesse molteplicità geometriche |
| 4 | A e B sono entrambe diagonalizzabili |
| 5 | Nessuna delle precedenti |

5. Sia $A \in M_n(\mathbb{R})$ ortogonale: $AA^t = I$. Stabilire quali tra le seguenti affermazioni sono vere (anche più risposte):

- | | |
|---|--|
| 1 | A è necessariamente diagonalizzabile |
| 2 | A è necessariamente non diagonalizzabile |
| 3 | Le righe di A formano una base ortonormale di \mathbb{R}^n |
| 4 | Le colonne di A formano una base ortonormale di \mathbb{R}^n |
| 5 | $\det A = 1$ |
| 6 | Nessuna delle precedenti |

6. Sia $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definito dalla formula $T(\vec{x}) = \vec{x} \wedge \vec{x}_0$ (prodotto vettoriale), essendo $\vec{x}_0 = (2, 3, 1)$. Stabilire quali tra le seguenti affermazioni sono corrette (eventualmente anche più risposte):

- 1 T è un endomorfismo iniettivo
- 2 T è un endomorfismo suriettivo
- 3 T non è né iniettivo né suriettivo
- 4 Nessuna delle precedenti

7. Sia

$$g : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$$

definita sui vettori $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$, $\vec{y} = (y_1, y_2, y_3)$ dalle formula

$$g(\vec{x}, \vec{y}) = x_1y_2 + x_2y_1 + x_1y_3 + x_3y_1 + x_2y_3 + x_3y_2$$

Stabilire quali tra le seguenti affermazioni sono corrette (eventualmente anche più risposte):

- 1 g è una forma bilineare simmetrica su \mathbb{R}^3
- 2 g è un prodotto scalare (forma bilineare simmetrica definita positiva) su \mathbb{R}^3
- 3 La matrice associata a g nella base canonica è $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
- 4 Nessuna delle precedenti

8. Sia $V = \{P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2; a_i \in \mathbb{R}\}$ lo spazio vettoriale dei polinomi di grado ≤ 2 a coefficienti reali, e si consideri l'endomorfismo

$$T : V \rightarrow V, \text{ definito da } T(P(x)) = P'(x) + P''(x)$$

(somma della derivata prima con la derivata seconda). Stabilire quale tra le seguenti affermazioni è vera:

- 1 Nella base canonica $\{1, x, x^2\}$ di V la matrice associata a T è $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
- 2 Nella base canonica $\{1, x, x^2\}$ di V la matrice associata a T è $A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
- 3 Nella base canonica $\{1, x, x^2\}$ di V la matrice associata a T è $A'' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
- 4 Nessuna delle precedenti

9. Sia $V = V_{\mathbb{R}}^n$ uno spazio vettoriale euclideo, sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il suo prodotto scalare e sia $T : V \rightarrow V$ un endomorfismo. Si ricordi che T si dice un *operatore simmetrico* se per tutti i vettori risulta $\langle T(\vec{v}), \vec{w} \rangle = \langle \vec{v}, T(\vec{w}) \rangle$. Stabilire quali tra le seguenti affermazioni sono vere (anche più risposte):

- 1 Se T è un operatore simmetrico, allora la matrice A ad esso associata in qualunque base di V è simmetrica
- 2 Se T è un operatore simmetrico, allora la matrice A ad esso associata in almeno una base di V è simmetrica
- 3 Se in almeno una base di V la matrice A associata a T è simmetrica, allora T è simmetrico
- 4 Nessuna delle precedenti

10. Data la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$, stabilire quali tra le seguenti affermazioni sono vere (anche più risposte).

- 1 A è diagonalizzabile
- 2 A ha tre autovalori distinti
- 3 A è simile alla matrice $A' = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$
- 4 A è simile alla matrice $A'' = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$
- 5 Nessuna delle precedenti