Secondo esonero di Geometria per Fisica, a.a. 2012-13, lettere Cf-K (Prof. P. Piccinni)
25 gennaio 2013

1. Si considerino nello spazio euclideo $\mathbb{R}^3$ le rette $r : x = 2z + 3,\ y = z + 4$ e $s : x = 4z + 6,\ y = 2z + 8$, essendo (x, y, z) le coordinate cartesiane di $\mathbb{R}^3$. Stabilire quali tra le seguenti affermazioni sono vere (eventualmente anche più risposte):

   $\boxed{1}$ r e s sono incidenti
   $\boxed{2}$ r e s sono coincidenti
   $\boxed{3}$ r e s sono parallele
   $\boxed{\bowtie 4}$ r e s sono sghembe
   $\boxed{5}$ r e s sono perpendicolari

   Il sistema lineare formato dalle quattro equazioni non ammette soluzioni. D'altra parte r e s hanno parametri direttori leggibili direttamente dalle equazioni assegnate, che sono equazioni ridotte. I parametri direttori di r sono $(2, 1, 1)$ e di s sono $(4, 2, 1)$. Dunque r e s non sono parallele, e sono quindi sghembe.

2. Si considerino nello spazio euclideo $\mathbb{R}^3$ i piani $\alpha_1 : x - y = 0$, $\alpha_2 : x - z = 0$ e $\alpha_3 : y - z = 0$, essendo (x, y, z) le coordinate cartesiane di $\mathbb{R}^3$. Stabilire quali tra le seguenti affermazioni sono vere (eventualmente anche più risposte):

   $\boxed{1}$ $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ sono a due a due perpendicolari
   $\boxed{2}$ $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ sono paralleli
   $\boxed{\bowtie 3}$ $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ appartengono ad uno stesso fascio di piani
   $\boxed{4}$ $\alpha_1 \cap \alpha_2 \cap \alpha_3$ è un punto

   L'equazione di α_3 si ottiene come differenza tra quella di α_2 e di α_1. Ne segue che i tre piani appartengono allo stesso fascio (di asse la retta $x = y = z$), e non possono dunque essere a due a due perpendicolari né paralleli.

3. Siano $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ e assumiamo che gli autovalori di A siano tutti distinti e coincidano con gli autovalori di B. Stabilire quali tra le seguenti affermazioni sono vere (anche più risposte):

   $\boxed{1}$ A e B sono diagonalizzabili
   $\boxed{2}$ A e B sono matrici simili
   $\boxed{3}$ A e B hanno lo stesso determinante
   $\boxed{\bowtie 4}$ Nessuna delle precedenti

   Se per autovalori si intendono gli autovalori reali, le prime tre affermazioni sono false: infatti A e B potrebbero essere privi di autovalori o avere entrambi un unico autovalore reale, e ciò non consente di concludere sulla diagonalizzabilità, sulla similitudine delle due matrici, né sulla coincidenza del determinante. Se invece si guardassero A e B come matrici in $M_n(\mathbb{C})$, e dunque agli autovalori complessi, sarebbero vere le affermazione 1,2,3. [N.B. Entrambe le scelte 1,2,3 vere e 4 vera sono state considerate corrette nella valutazione].

4. Siano $A, B \in M_2(\mathbb{R})$ e supponiamo che $\text{tr } A = \text{tr } B$ e $\det A = \det B$. Stabilire quali tra le seguenti affermazioni sono vere (anche più risposte):

   $\boxed{\bowtie 1}$ A e B hanno gli stessi autovalori
   $\boxed{\bowtie 2}$ A e B hanno gli stessi autovalori con le stesse molteplicità algebriche
   $\boxed{3}$ A e B hanno gli stessi autovalori con le stesse molteplicità geometriche
   $\boxed{4}$ A e B sono entrambe diagonalizzabili
   $\boxed{5}$ Nessuna delle precedenti

   Infatti la traccia è somma dei due autovalori (reali distinti, o reali e coincidenti, o complessi e coniugati) e il determinante è il loro prodotto. Le molteplicità geometriche possono essere diverse, come mostra l'esempio $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

5. Sia $A \in M_n(\mathbb{R})$ ortogonale: $AA^t = I$. Stabilire quali tra le seguenti affermazioni sono vere (anche più risposte):

1	A è necessariamente diagonalizzabile
2	A è necessariamente non diagonalizzabile
$\bowtie$ 3	Le righe di A formano una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$
$\bowtie$ 4	Le colonne di A formano una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$
5	$\det A = 1$
6	Nessuna delle precedenti

Le risposte 3 e 4 sono essenzialmente la definizione di matrice ortogonale, equivalenti a richiedere che l'inversa coincida con la trasposta. Si ricordi che il determinante di una matrice ortogonale è ± 1, e che le matrici di rotazione nel piano sono ortogonali ma generalmente non diagonalizzabili.

6. Sia $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definito dalla formula $T(\vec{x}) = \vec{x} \wedge \vec{x}_0$ (prodotto vettoriale), essendo $\vec{x}_0 = (2, 3, 1)$. Stabilire quali tra le seguenti affermazioni sono corrette (eventualmente anche più risposte):

1	T è un endomorfismo iniettivo
2	T è un endomorfismo suriettivo
$\bowtie$ 3	T non è né iniettivo né suriettivo
4	Nessuna delle precedenti

Il nucleo di T è costituito dalla retta generata da $\vec{x}_0$, l'immagine del piano perpendicolare a $\vec{x}_0$.

7. Sia
$$g : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$$
definita sui vettori $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$, $\vec{y} = (y_1, y_2, y_3)$ dalle formula
$$g(\vec{x}, \vec{y}) = x_1y_2 + x_2y_1 + x_1y_3 + x_3y_1 + x_2y_3 + x_3y_2$$
Stabilire quali tra le seguenti affermazioni sono corrette (eventualmente anche più risposte):

$\bowtie$ 1	g è una forma bilineare simmetrica su $\mathbb{R}^3$
2	g è un prodotto scalare (forma bilineare simmetrica definita positiva) su $\mathbb{R}^3$
$\bowtie$ 3	La matrice associata a g nella base canonica è $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
4	Nessuna delle precedenti

La verifica di 1 e 3 è diretta. La traccia della matrice associata a g è nulla, e dunque i suoi autovalori non possono essere tutti positivi. Ciò esclude che g sia definita positiva.

8. Sia $V = \{P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2; a_i \in \mathbb{R}\}$ lo spazio vettoriale dei polinomi di grado ≤ 2 a coefficienti reali, e si consideri l'endomorfismo
$$T : V \to V, \text{ definito da } T(P(x)) = P'(x) + P''(x)$$
(somma della derivata prima con la derivata seconda). Stabilire quale tra le seguenti affermazioni è vera:

$\bowtie$ 1	Nella base canonica $\{1, x, x^2\}$ di V la matrice associata a T è $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
2	Nella base canonica $\{1, x, x^2\}$ di V la matrice associata a T è $A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
3	Nella base canonica $\{1, x, x^2\}$ di V la matrice associata a T è $A'' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
4	Nessuna delle precedenti

Risulta infatti $T(1) = 0$, $T(x) = 1$, $T(x^2) = 2x + 2$.

9. Sia $V = V^n_{\mathbb{R}}$ uno spazio vettoriale euclideo, sia $< \, , \, >$ il suo prodotto scalare e sia $T : V \to V$ un endomorfismo. Si ricordi che T si dice un *operatore simmetrico* se per tutti i vettori risulta $< T(\vec{v}), \vec{w} >=< \vec{v}, T(\vec{w}) >$. Stabilire quali tra le seguenti affermazioni sono vere (anche più risposte):

   $\boxed{1}$ Se T è un operatore simmetrico, allora la matrice A ad esso associata in qualunque base di V è simmetrica

   $\boxed{\bowtie 2}$ Se T è un operatore simmetrico, allora la matrice A ad esso associata in almeno una base di V è simmetrica

   $\boxed{3}$ Se in almeno una base di V la matrice A associata a T iè simmetrica, allora T è simmetrico

   $\boxed{4}$ Nessuna delle precedenti

   Si ricordi che un operatore simmetrico si rappresenta con matrici simmetriche solo in basi ortonormali. Dunque le affermazioni 1 e 3 sono false, se si scelgono basi non ortonormali.

10. Data la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$, stabilire quali tra le seguenti affermazioni sono vere (anche più risposte).

    $\boxed{1}$ A è diagonalizzabile

    $\boxed{2}$ A ha tre autovalori distinti

    $\boxed{3}$ A è simile alla matrice $A' = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

    $\boxed{4}$ A è simile alla matrice $A'' = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

    $\boxed{5}$ Nessuna delle precedenti

    La diagonalizzabilità di A, con autovalori $\lambda_1 = 2$ (con molteplicità algebrica e geometrica 2) e $\lambda_2 = -1$, segue da un calcolo diretto.