Esercitazione di Geometria del 15.11.2012 (Corso di laurea in Fisica, Canale Cf-K)
Prof. P. Piccinni

1. Si considerino nello spazio $\mathbb{R}^3$ i seguenti quattro vettori (necessariamente linearmente dipendenti)

$$\vec{v}_1 = (1,1,1),\ \vec{v}_2 = (1,2,2),\ \vec{v}_3 = (0,-1,1),\ \vec{v}_4 = (3,1,1).$$

Stabilire quale tra le seguenti affermazioni è vera:

$\boxed{1}$ ognuno tra i vettori $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4$ è combinazione lineare dei rimanenti

$\boxed{2}$ uno solo tra i vettori $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4$ è combinazione lineare dei rimanenti

$\boxed{3}$ due e non più di due tra i vettori $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4$ sono combinazioni lineari dei rimanenti

$\boxed{4}$ tre e non più di tre tra i vettori $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4$ sono combinazioni lineari dei rimanenti

2. Si considerino in $M_2(\mathbb{C})$ le seguenti tre matrici (dette matrici di Pauli):

$$J_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad J_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \qquad J_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

Stabilire quali tra le seguenti affermazioni sono vere (anche più risposte):

$\boxed{1}$ J_1, J_2, J_3 sono linearmente indipendenti in $M_2(\mathbb{C})$

$\boxed{2}$ Il sottospazio di $M_2(\mathbb{C})$ generato da J_1, J_2, J_3 consiste delle matrici a traccia nulla

$\boxed{3}$ $J_1 \cdot J_2 = J_3,\ \ J_2 \cdot J_3 = J_1,\ \ J_3 \cdot J_1 = J_2,$

$\boxed{4}$ $J_1 \cdot J_2 = iJ_3,\ \ J_2 \cdot J_3 = iJ_1,\ \ J_3 \cdot J_1 = iJ_2,$

$\boxed{5}$ $J_1^2 = J_2^2 = J_3^2 = I$

3. Si considerino le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Stabilire quali tra le seguenti affermazioni sono vere (eventualmente anche più risposte):

$\boxed{1}$ $AB = BA$ $\qquad$ $\boxed{2}$ $B = A^{-1}$

$\boxed{3}$ $A^2 = B^2$ $\qquad$ $\boxed{4}$ Nessuna delle precedenti

4. Si consideri il sistema lineare:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = & 1 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = & 0 \\ x_1 + 2x_2 + kx_3 = & k+1 \end{cases}$$

essendo k un parametro reale. Stabilire quali tra le seguenti affermazioni sono vere:

$\boxed{1}$ Il sistema ammette un'unica soluzione per ogni k

$\boxed{2}$ Il sistema ammette infinite soluzioni per ogni k

$\boxed{3}$ Il sistema ammette un'unica soluzione per ogni $k \neq -2$

$\boxed{4}$ Il sistema ammette infinite soluzioni per ogni $k \neq -2$

5. Nello spazio vettoriale $M_3(\mathbb{R})$ si considerino le matrici:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} B_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Stabilire quali tra le seguenti affermazioni sono vere (eventualmente anche più risposte):

1. A_1, A_2, A_3 sono linearmente indipendenti in $M_3(\mathbb{R})$
2. B_1, B_2, B_3 sono linearmente indipendenti in $M_3(\mathbb{R})$
3. $A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3$ sono linearmente indipendenti in $M_3(\mathbb{R})$
4. Le matrici $A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3$ sono tutte non invertibili

L'esercizio è stato un po' lungo, ma la risposta a quest'ultima domanda dovrebbe entrare nel riquadro che segue. Ognuna delle $A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3$ è matrice dei coefficienti di un sistema lineare omogeneo. Tra questi sei sistemi, due hanno un'unica soluzione. Quali sono tali due sistemi, perché, e qual'è tale soluzione?

Le due matrici sono : ....**Infatti**..**La soluzione e′**.................................

6. Si considerino in $\mathbb{R}^3$ i vettori

$$\vec{v}_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right), \quad \vec{v}_2 = \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Stabilire quali tra le seguenti affermazioni sono vere (eventualmente anche più risposte):

1. $\vec{v}_1,\ \vec{v}_2$ sono ortonormali
2. $\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2 = \left(\frac{-2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$
3. $det\ A = -1$
4. La matrice A che ha per righe le coordinate di $\vec{v}_1,\ \vec{v}_2,\ \vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2$ è una matrice ortogonale

7. Si consideri lo spazio vettoriale

$$\mathbb{R}_{\leq 3}[x] = \{p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3; a_i \in \mathbb{R}\}$$

dei polinomi di grado ≤ 3 a coefficienti in $\mathbb{R}$ nell'indeterminata x. Stabilire quali tra le seguenti affermazioni sono vere (eventualmente anche più risposte):

1. $S = \{p(x) \in \mathbb{R}_{\leq 3}[x]; a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 1\}$ è un sottospazio vettoriale
2. $S = \{p(x) \in \mathbb{R}_{\leq 3}[x]; a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 0\}$ è un sottospazio vettoriale
3. $S = \{p(x) \in \mathbb{R}_{\leq 3}[x]; p'(x) = \lambda p(x)\}$ è un sottospazio vettoriale, essendo $p'(x)$ il polinomio derivato di $p(x)$ e $\lambda \in \mathbb{R} - 0$
4. $S = \{p(x) \in \mathbb{R}_{\leq 3}[x]; p'(x) = 0)\}$ è un sottospazio vettoriale

8. Nel piano affine $\mathbb{R}^2$, si consideri il punto $P_0 = (1, 3)$ e il vettore $\vec{v} = (-1, 4)$. Stabilire quale tra le seguenti affermazioni è vera:

1. la retta per P_0 e parallela a $\vec{v}$ ha equazione cartesiana $-(x-1) + 4(y-3) = 0$
2. la retta per P_0 e parallela a $\vec{v}$ ha equazione cartesiana $4(x-1) - (y-3) = 0$
3. la retta per P_0 e parallela a $\vec{v}$ ha equazione cartesiana $(x-1) + 4(y-3) = 0$
4. la retta per P_0 e parallela a $\vec{v}$ ha equazione cartesiana $4(x-1) + (y-3) = 0$
5. Nessuna delle precedenti