

Geometria per Fisica, a.a. 2012-13 - Prof. P. Piccini
Tradizionale Tombolata di Fine Anno

Tombola (5 esercizi svolti bene e esposti ancora meglio): bonus di 2.5 punti
Cinquina (4 esercizi svolti bene e esposti ancora meglio): bonus di 2 punti
Quaterna (3 esercizi svolti bene e esposti ancora meglio): bonus di 1.5 punti
Terno (2 esercizi svolti bene e esposti ancora meglio): bonus di 1 punto
Ambo (1 esercizio svolto bene e esposto ancora meglio): bonus di 0.5 punti

N.B: Termine ultimo per la consegna: 11 Gennaio 2013
I bonus sono spendibili solo nei due appelli di Gennaio-Febbraio 2013

Esercizio 1. Si consideri la matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & k-1 & 1 & k & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -3 \\ 1 & k+1 & 1 & k & k \end{pmatrix}.$$

- i) Calcolare, al variare di $k \in \mathbf{R}$, il rango di A .
- ii) Considerata l'applicazione lineare $F : \mathbf{R}^5 \rightarrow \mathbf{R}^3$ associata ad A , determinare, al variare di $k \in \mathbf{R}$, la dimensione e le equazioni del nucleo $\ker F \subset \mathbf{R}^5$.
- iii) Determinare, sempre al variare di k , una base di $\ker F$.

Esercizio 2. Siano $U = \text{Span}\{\vec{u}\}$ e $W = \text{Span}\{\vec{w}_1, \vec{w}_2\}$ i sottospazi di \mathbf{R}^3 generati rispettivamente dal vettore $\vec{u} = (1, 2, 3)$ e dai vettori $\vec{w}_1 = (3, 2, 1), \vec{w}_2 = (1, 1, 1)$

- i) Determinare la dimensione e una base di $U \cap W$.
- ii) Stabilire se lo spazio vettoriale somma $U + W$ è una somma diretta.
- iii) Scrivere equazioni cartesiane delle sottovarietà affini $U' = \vec{v}_0 + U$ e $W' = \vec{v}_0 + W$ di \mathbf{R}^3 , essendo $\vec{v}_0 = (4, 1, -5)$.

Esercizio 3. Spazio affine, $RA(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Si considerino i quattro punti:

$$P_1(-1, 1, 1), P_2(4, 1, 0), P_3(1, 0, 0), P_4(-4, 0, 1).$$

- i) Verificare che P_1, P_2, P_3, P_4 sono complanari e scrivere l'equazione del piano α da essi individuato.
- ii) Verificare che P_1, P_2, P_3, P_4 sono vertici consecutivi di un parallelogramma contenuto in α .
- iii) Scrivere le equazioni dei piani $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$, contenenti le facce laterali della piramide di base il parallelogramma $P_1P_2P_3P_4$ e vertice nell'origine O .

Esercizio 4. Siano

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- i) Mostrare che A e B sono invertibili e calcolare $B^{-1}AB$ e $A^{-1}BA$.
- ii) Stabilire se qualcuna tra le matrici $A, B, B^{-1}AB, A^{-1}BA$ è diagonalizzabile.

Esercizio 5. Si considerino le matrici:

$$A(h) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ h & 2+h & 2+h \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B(k) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & k \\ 2 & 4 & 6+k \\ -1 & -1 & 2+k \end{pmatrix}$$

- i) Determinare, al variare di h e k , i determinanti e le tracce di $A(h)$ e di $B(k)$.
- ii) Verificare che esiste un'unica coppia (h_0, k_0) tale che risulti $\det A(h_0) = \det B(k_0)$ e $\text{tr} A(h_0) = \text{tr} B(k_0)$.
- iii) Stabilire se le matrici $A_0 = A(h_0)$ e $B_0 = B(k_0)$ hanno gli stessi autovalori.
- iv) Stabilire infine se A_0 e B_0 sono matrici simili.