

Geometria
Prova scritta, II appello, sessione invernale
Corso di laurea in fisica — A.A 2017/2018
Canali A – C, L – Pa e Pb – Z

DURATA: 2 ORA E 30 MINUTI

Simone Diverio Alessandro D'Andrea Paolo Piccinni
 Antonietta Venezia

6 febbraio 2018

Esercizio 1. Sia $V = M_{n,n}(\mathbb{R})$ lo spazio vettoriale delle matrici quadrate di ordine n a coefficienti reali. Dimostrare o confutare, se necessario mediante un controesempio, le seguenti affermazioni.

- (i) Il sottoinsieme $U \subset V$ definito da $U = \{A \in V \mid \det A = 0\}$ è un sottospazio vettoriale.
- (ii) Il sottoinsieme $L \subset V$ definito da $L = \{A \in V \mid \operatorname{tr} A = 2018\}$ è un sottospazio affine, se $\operatorname{tr} A$ è la *traccia* di A , cioè la somma degli elementi sulla diagonale principale.
- (iii) L'applicazione

$$T: V \rightarrow \mathbb{R}$$
$$A \mapsto \operatorname{tr} A$$

è lineare, suriettiva, e il suo nucleo ha dimensione $n^2 - 1$.

Esercizio 2. Si considerino i seguenti sottospazi vettoriali di \mathbb{C}^4 :

$$U = \operatorname{Span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 2i \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2i \\ -1 \\ -2 \\ -i \end{pmatrix} \right\}, \quad V : \begin{cases} z_1 - iz_2 + z_4 = 0 \\ z_3 + iz_4 = 0. \end{cases}$$

- (i) Esibire una base per entrambi i sottospazi.
- (ii) Determinare un insieme *minimale* di equazioni cartesiane per $U \cap V$.
- (iii) Determinare la dimensione di $U + V$.

Esercizio 3. Si consideri la matrice $A \in M_{3,3}(\mathbb{R})$ data da

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

e l'operatore lineare ad essa associato

$$L_A: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3.$$

- (i) Determinare autovalori e autospazi di A e stabilire se A è diagonalizzabile.
- (ii) Scrivere le matrici $A^2 = A \cdot A$ e $A^3 = A \cdot A \cdot A$, determinarne autovalori e autospazi e stabilire se A^2 e A^3 sono diagonalizzabili.
- (iii) Stabilire (motivando la risposta) che relazione sussiste tra autovalori e autospazi di A e autovalori e autospazi di $A^n = A \cdot A \dots A$ (n volte), per ogni $n \geq 2$.

Esercizio 4. I vettori $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ sono autovettori dell'applicazione lineare $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ di autovalori, rispettivamente, 1, 2, 3.

Scrivere la matrice associata a T , utilizzando sia in partenza che in arrivo la base canonica di \mathbb{R}^3 .

Esercizio 5. Si consideri, al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$, il sistema lineare:

$$\begin{cases} -x & + y & + z & = & 3 - k \\ -x & + (k+1)y & - z & = & k + 1 \\ & y & - 2z & = & 0. \end{cases}$$

- (i) Determinare per quali valori di k il sistema è compatibile, studiando il rango della matrice dei coefficienti e della matrice completa.
- (ii) Per i valori di k per cui il sistema risulta compatibile, determinare esplicitamente le soluzioni.
- (iii) Per ciascuno dei valori di k , se esistono, per cui l'insieme delle soluzioni rappresenta una retta affine, determinare se tale retta è parallela alla retta r di equazioni parametriche

$$r : \begin{cases} x = -6t + 4 \\ y = -4t + 1 \\ z = -2t - 1. \end{cases}$$

SOLUZIONI

Esercizio 1. (i) Per $n > 1$, U non è un sottospazio vettoriale, come si mostra facilmente osservando che, già nel caso $n = 2$, le matrici

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

hanno determinante 0 e appartengono ad U , mentre la loro somma, che è l'identità, ha determinante 1 e giace quindi al di fuori di U .

Non è difficile presentare controesempi analoghi per ogni $n > 1$. Nel caso $n = 1$, invece, l'unica matrice di determinante 0 è quella nulla, e U è il sottospazio vettoriale banale.

(ii) Siano $A = (a_{ij}), B = (b_{ij}) \in V$. Allora se $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, la matrice $\alpha A + \beta B$ ha per elementi $(\alpha a_{ij} + \beta b_{ij})$ dunque

$$\text{tr}(\alpha A + \beta B) = \sum_{i=1}^n \alpha a_{ii} + \beta b_{ii} = \alpha \sum_{i=1}^n a_{ii} + \beta \sum_{i=1}^n b_{ii} = \alpha \text{tr} A + \beta \text{tr} B.$$

In altre parole, l'applicazione "traccia" di cui al punto (iii) è un'applicazione lineare, ed L è allora un sottospazio affine. Infatti L è la preimmagine di 2018 per l'applicazione lineare T del punto successivo. Altro modo di vederlo è che L si può scrivere nella forma

$$L = A_0 + W,$$

dove A_0 è una qualunque matrice in V la cui traccia sia 2018 (ad esempio la matrice che ha tutti elementi nulli tranne uno sulla diagonale principale, esattamente uguale a 2018), essendo $W = \ker T$ il sottospazio vettoriale delle matrici a traccia nulla.

(iii) Che l'applicazione T sia lineare lo abbiamo già osservato precedentemente. Per verificare la suriettività, basta osservare che per ogni $t \in \mathbb{R}$, la matrice che ha t come elemento di riga uno e colonna uno, e zero altrove ha traccia esattamente uguale a t . Per il teorema della dimensione (anche detto teorema del rango, o teorema di nullità più rango) allora

$$\underbrace{\dim \text{Im}(T)}_{=1} + \dim \ker T = \underbrace{\dim V}_{=n^2},$$

cioè $\dim \ker T = n^2 - 1$.

Esercizio 2. Per (i), si vede subito che il terzo vettore generatore di U è ottenuto come il primo più il secondo, il tutto moltiplicato per i . Del resto i primi due vettori generatori sono chiaramente indipendenti, dunque una base \mathcal{B}_U per U è data da

$$\mathcal{B}_U = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 2i \\ -2 \end{pmatrix} \right\}.$$

Una base \mathcal{B}_V per V si può ottenere risolvendo il sistema lineare omogeneo che descrive V , il quale è già ridotto a scala, con pivot corrispondenti alle variabili z_1 e z_3 . Usando come parametri liberi z_2 e z_4 , otteniamo dunque

$$\mathcal{B}_V = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -i \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Per (ii), notiamo innanzitutto che il secondo vettore della base \mathcal{B}_U soddisfa le equazioni che definiscono V , mentre il primo no. Dunque $U \cap V$ è generato $(1, i, 2i, -2)^t$, ed ha dunque dimensione uno. Un insieme minimale di equazioni cartesiane per $U \cap V$ deve dunque essere costituito da 3 equazioni, vivendo il problema in \mathbb{C}^4 . Due equazioni le abbiamo già: sono quelle che definiscono V . Se aggiungiamo ad esempio $2z_2 - z_3 = 0$, che è chiaramente soddisfatta da $(1, i, 2i, -2)^t$, otteniamo

$$\begin{cases} z_1 - iz_2 + z_4 = 0 \\ 2z_2 - z_3 = 0 \\ z_3 + iz_4 = 0, \end{cases}$$

che è ancora ridotto a scala e dunque le tre equazioni sono indipendenti, e descrivono necessariamente $U \cap V$ (perché?).

Per (iii), la formula di Grassmann fornisce immediatamente

$$\dim(U + V) = \dim U + \dim V - \dim(U \cap V) = 2 + 2 - 1 = 3.$$

Esercizio 3. Per (i), risulta

$$\det(A - \lambda I) = (1 - \lambda)^3 - (1 - \lambda) = (1 - \lambda)\lambda(\lambda - 2),$$

da cui i tre autovalori distinti $\lambda = 0, 1, 2$ con autospazi rispettivamente

$$V_0 = \{(t_0, 0, -t_0)\}, \quad V_1 = \{(0, t_1, 0)\}, \quad V_2 = \{(t_2, 0, t_2)\},$$

ottenibili dai sistemi lineari omogenei rispettivamente

$$V_0 : \begin{cases} x_1 & +x_3 & = & 0 \\ & x_2 & & = & 0 \\ x_1 & +x_3 & = & 0 \end{cases},$$

$$V_1 : \begin{cases} x_1 & +x_3 & = & x_1 \\ & x_2 & & = & x_2 \\ x_1 & +x_3 & = & x_3 \end{cases},$$

$$V_2 : \begin{cases} x_1 & +x_3 & = & 2x_1 \\ & x_2 & & = & 2x_2 \\ x_1 & +x_3 & = & 2x_3 \end{cases}.$$

Per (ii) e (iii), si vede facilmente che

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad A^3 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 4 \end{pmatrix},$$

e non è complicato dimostrare per induzione che

$$A^n = \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 0 & 2^{n-1} \\ 0 & 1 & 0 \\ 2^{n-1} & 0 & 2^{n-1} \end{pmatrix}$$

se mai si volessero calcolare autovalori e autospazi di A^n direttamente dalla matrice.

Tuttavia, da $Av = \lambda v$ segue $A^2v = A(Av) = A(\lambda v) = \lambda A(v) = \lambda^2v$, risulta che V_0, V_1, V_2 sono autospazi di A^2 , e similmente di A^n per ogni $n \geq 2$. Gli autovalori di A^n sono dunque $0^n = 0, 1^n = 1$ e 2^n . In particolare tutte le A^n hanno tre autovalori distinti e sono quindi sono diagonalizzabili.

Esercizio 4. L'enunciato dell'esercizio ci informa che

$$T \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad T \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad T \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Ma allora

$$T \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - T \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix},$$

da cui

$$T \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + T \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix},$$

e

$$T \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - T \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Pertanto

$$T \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/2 \\ -1/2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad T \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 3/2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad T \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix},$$

e la matrice cercata è

$$\begin{pmatrix} 3/2 & -1/2 & 0 \\ -1/2 & 3/2 & 0 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 5. Per (i), la matrice dei coefficienti e la matrice completa del sistema sono rispettivamente:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & k+1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad A' = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 3-k \\ -1 & k+1 & -1 & k+1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Poiché il determinante di A è $\det A = 2k - 2$, per $k \neq 1$ risulta $\det A \neq 0$ e dunque: $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} A' = 3$; per $k = 1$, per entrambe le matrici, la terza riga si ottiene sottraendo alla seconda riga la prima, mentre le prime due righe sono chiaramente linearmente indipendenti e pertanto in questo caso si ha $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} A' = 2$. Il sistema è quindi compatibile per ogni valore del parametro k .

Per il punto (ii), se $k \neq 1$ il sistema ammette una sola soluzione data da $(x, y, z) = (k, 2, 1)$ (può essere calcolata anche usando il teorema di Cramer). Invece per $k = 1$, il sistema ammette infinite soluzioni dipendenti da un parametro. In tal caso il sistema è equivalente al sistema formato da due sue equazioni linearmente indipendenti, ad esempio:

$$\begin{cases} -x + y + z = 2 \\ y - 2z = 0. \end{cases}$$

Questo può essere risolto ponendo $z = s$ come parametro e ottenendo dunque le infinite soluzioni $(x, y, z) = (3s + 2, 2s, s) = (2, 0, 0) + s(3, 2, 1)$.

Infine, per il punto (iii), il sistema descrive una retta affine per la sola scelta $k = 1$. Poiché $(-6, -4, -2) = -2 \cdot (3, 2, 1)$, le due rette sono in tal caso entrambe parallele al vettore $(3, 2, 1)$ e sono quindi parallele tra loro.