Geometria
Prova scritta, II appello, sessione invernale
Corso di laurea in fisica — A.A 2017/2018
Canali A – C, L – Pa e Pb – Z

Durata: 2 ora e 30 minuti

Simone Diverio   Alessandro D'Andrea   Paolo Piccinni
Antonietta Venezia

6 febbraio 2018

Esercizio 1. Sia $V = M_{n,n}(\mathbb{R})$ lo spazio vettoriale delle matrici quadrate di ordine n a coefficienti reali. Dimostrare o confutare, se necessario mediante un controesempio, le seguenti affermazioni.

(i) Il sottoinsieme $U \subset V$ definito da $U = \{A \in V \mid \det A = 0\}$ è un sottospazio vettoriale.

(ii) Il sottoinsieme $L \subset V$ definito da $L = \{A \in V \mid \operatorname{tr} A = 2018\}$ è un sottospazio affine, se $\operatorname{tr} A$ è la *traccia* di A, cioè la somma degli elementi sulla diagonale principale.

(iii) L'applicazione
$$\begin{aligned} T\colon V &\to \mathbb{R} \\ A &\mapsto \operatorname{tr} A \end{aligned}$$
è lineare, suriettiva, e il suo nucleo ha dimensione $n^2 - 1$.

Esercizio 2. Si considerino i seguenti sottospazi vettoriali di $\mathbb{C}^4$:
$$U = \operatorname{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 2i \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2i \\ -1 \\ -2 \\ -i \end{pmatrix} \right\}, \quad V : \begin{cases} z_1 - iz_2 + z_4 = 0 \\ z_3 + iz_4 = 0. \end{cases}$$

(i) Esibire una base per entrambi i sottospazi.

(ii) Determinare un insieme *minimale* di equazioni cartesiane per $U \cap V$.

(iii) Determinare la dimensione di $U + V$.

Esercizio 3. Si consideri la matrice $A \in M_{3,3}(\mathbb{R})$ data da

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

e l'operatore lineare ad essa associato

$$L_A \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3.$$

(i) Determinare autovalori e autospazi di A e stabilire se A è diagonalizzabile.

(ii) Scrivere le matrici $A^2 = A \cdot A$ e $A^3 = A \cdot A \cdot A$, determinarne autovalori e autospazi e stabilire se A^2 e A^3 sono diagonalizzabili.

(iii) Stabilire (motivando la risposta) che relazione sussiste tra autovalori e autospazi di A e autovalori e autospazi di $A^n = A \cdot A \dots A$ (n volte), per ogni $n \geq 2$.

Esercizio 4. I vettori $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ sono autovettori dell'applicazione lineare $T \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ di autovalori, rispettivamente, $1, 2, 3$.

Scrivere la matrice associata a T, utilizzando sia in partenza che in arrivo la base canonica di $\mathbb{R}^3$.

Esercizio 5. Si consideri, al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$, il sistema lineare:

$$\begin{cases} -x & +y & +z & = & 3-k \\ -x & +(k+1)y & -z & = & k+1 \\ & y & -2z & = & 0. \end{cases}$$

(i) Determinare per quali valori di k il sistema è compatibile, studiando il rango della matrice dei coefficienti e della matrice completa.

(ii) Per i valori di k per cui il sistema risulta compatibile, determinare esplicitamente le soluzioni.

(iii) Per ciascuno dei valori di k, se esistono, per cui l'insieme delle soluzioni rappresenta una retta affine, determinare se tale retta è parallela alla retta r di equazioni parametriche

$$r : \begin{cases} x = -6t + 4 \\ y = -4t + 1 \\ z = -2t - 1. \end{cases}$$