Geometria
Prova scritta, appello unico, sessione autunnale
Corso di laurea in fisica — A.A 2017/2018
Canali A – C, e L – Pa

Durata: 2 ore e 30 minuti

Simone Diverio   Alessandro D'Andrea   Paolo Piccinni

17 settembre 2018

Esercizio 1. Sia p un numero reale. Una matrice $A = (a_{ij}) \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ si dice *p-stocastica* se la somma dei coefficienti di ciascuna sua riga è p. Siano

$$U_p = \{A \in M_{n,n}(\mathbb{R}) \mid A \text{ è } p\text{-stocastica}\},$$

e

$$U = \bigcup_{p \in \mathbb{R}} U_p.$$

(i) Stabilire per quali valori di $p \in \mathbb{R}$ il sottoinsieme U_p sia un sottospazio vettoriale di $M_{n,n}(\mathbb{R})$.

(ii) Stabilire se U è un sottospazio vettoriale di $M_{n,n}(\mathbb{R})$.

(iii) Stabilire per quali valori di p si ha che $A \in U_p$ implica $\det A = 0$.

(iv) Stabilire se è vera la seguente affermazione: se A è p-stocastica, anche A^t è p-stocastica

Esercizio 2. Si consideri la matrice:

$$A_k = \begin{pmatrix} 0 & k-1 & 1 & k & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -3 \\ 1 & k+1 & 1 & k & k \end{pmatrix}.$$

(i) Calcolare, al variare di $k \in \mathbb{R}$, il rango di A_k.

(ii) Considerata l'applicazione lineare $L_{A_k} : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^3$ associata ad A_k, determinare, al variare di $k \in \mathbb{R}$, la dimensione e le equazioni del nucleo $\ker L_{A_k} \subseteq \mathbb{R}^5$.

(iii) Determinare, sempre al variare di k, una base di $\ker L_{A_k}$.

Esercizio 3. Si considerino i seguenti sottospazi di $\mathbb{C}^3$:

$$V_1 = \mathrm{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ i \end{pmatrix} \right\}, \quad V_2 = \{iz_1 + z_2 - z_3 = 0\}, \quad V_3 = \mathrm{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -i \\ 2i \end{pmatrix} \right\}.$$

(i) Determinare basi per ognuno di essi.

(ii) Determinare una base di $V_1 \cap V_2 \cap V_3$.

(iii) Determinare la dimensione di $V_1 + V_2$.

Esercizio 4. Sia $T \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ l'operatore lineare tale che

$$\ker T = \mathrm{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad T \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad T \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(i) Scrivere la matrice A associata a T usando come base di $\mathbb{R}^3$ la terna

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

e come base di $\mathbb{R}^2$ quella canonica.

(ii) Scrivere la matrice B associata a T usando sia in partenza che in arrivo le rispettive basi canoniche.

Esercizio 5. Dire se l'operatore lineare $L_M : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ di matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 4 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

sia o meno diagonalizzabile, calcolandone gli autovalori, le molteplicità algebriche e geometriche e le equazioni cartesiane degli autospazi.

Soluzioni

(1.i) Se $p \neq 0$ sicuramente U_p non può essere un sottospazio, ché non contiene la matrice nulla. Se invece $p = 0$, allora U_0 è un sottospazio.Infatti siano $A, B \in U_0$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Per ogni $i = 1, \ldots, n$, la i-esima riga di $C = \alpha A + \beta B$ è data dalla somma vettoriale di $\alpha A_i + \beta B_i$. Dunque la somma degli elementi sulla i-esima riga di C è data da α volte la somma degli elementi sulla i-esima riga di A più β volte la somma degli elementi sulla i-esima riga di B. Ma la somma degli elementi sulla i-esima riga di A nonché quelli sulla i-esima riga di B fa zero essendo $A, B \in U_0$. Dunque anche la somma sulla i-esima riga di C fa zero e $C \in U_0$.

(1.ii) Il sottoinsieme U è un sottospazio. Infatti se $A, B \in U$ allora $A \in U_p$ per qualche $p \in \mathbb{R}$ e $B \in U_q$ per qualche $q \in \mathbb{R}$. Ma allora $\alpha A + \beta B \in U_{\alpha p + \beta q} \subset U$.

(1.iii) Ogni valore $p \neq 0$ non può andare bene in quanto per ogni tale valore esiste una matrice in U_p il cui determinante è non nullo, ad esempio p volte la matrice identità. Se invece $p = 0$ la condizione ci dice che le righe di una qualunque $A \in U_0$ sono vettori di $\mathbb{R}^n$ (pensati scritti per riga) che appartengono tutti la sottospazio vettoriale di dimensione $n-1$ dato dall'equazione "somma delle coordinate uguale a zero". Quindi le righe di una tale A, che sono in numero di n, appartengono tutte ad un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$di dimensione $n-1$. Esse sono quindi necessariamente linearmente dipendenti e dunque $\det A = 0$.

(1.iv) L'affermazione è falsa. Un controesempio (per $n = 2$) è dato ad esempio da

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Infatti $A \in U_0$ ma $A^t \notin U_p$ per ogni p.

(2.i) Scambiando prima e terza riga e poi seconda e quinta colonna (ricordarsi quindi poi che la seconda colonna corrisponderà alla variabile x_5 e la quinta alla variabile x_2) si ottiene la matrice

$$A'_k = \begin{pmatrix} 1 & k & 1 & k & k+1 \\ 0 & -3 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & k & k-1 \end{pmatrix}.$$

Tale matrice è già ridotta a scala ed ha tre pivot, indipendentemente dai valori assunti da k. Quindi, essendo $\operatorname{rk} A_k = \operatorname{rk} A'_k$, abbiamo $\operatorname{rk} A_k = 3$, per ogni $k \in \mathbb{R}$.

(2.ii) Siccome $\operatorname{rk} A_k = 3$, e $\operatorname{rk} A_k = \dim \operatorname{Im} L_{A_k}$, e per il teorema della dimensione abbiamo $\dim \ker L_{A_k} + \dim \operatorname{Im} L_{A_k} = 5$, ne segue che $\dim \ker L_{A_k} = 2$. Equazioni cartesiane del nucleo si ottengono semplicemente scrivendo il sistema lineare omogeneo associato ad A_k:

$$\ker L_{A_k} = \begin{cases} (k-1)x_2 + x_3 + kx_4 = 0 \\ x_2 + x_3 - 3x_5 = 0 \\ x_1 + (k+1)x_2 + x_3 + kx_4 + kx_5 = 0. \end{cases}$$

(2.iii) Per determinare una base di $\ker L_{A_k}$ bisogna risolvere il sistema appena scritto, o, equivalentemente, il sistema lineare omogeneo associato a A'_k. Le variabili libere corrisponderanno alla terza e quarta colonna, cioè rispettivamente a x_4 e x_2.

Abbiamo dunque

$$\begin{cases} x_1 = \frac{k^2}{3}s + \left(\frac{k^2}{3} - 2\right)t \\ x_2 = t \\ x_3 = -ks - (k-1)t \\ x_4 = s \\ x_5 = \frac{1}{3}(-ks - kt). \end{cases}$$

Una base è dunque data da

$$\left\{ \begin{pmatrix} k^2/3 \\ 0 \\ -k \\ 1 \\ -k/3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} k^2/3-2 \\ 1 \\ 1-k \\ 0 \\ -k/3 \end{pmatrix} \right\}.$$

(3.i) Si vede immediatamente che il sistema di generatori dato sia per V_1 che per V_3 è linearmente indipendente (i due vettori non sono uno multiplo dell'altro), quindi i generatori dati forniscono anche una base. Si osservi inoltre che i generatori di V_3 sono rispettivamente dati dalla differenza e dalla somma dei generatori di V_1, quindi $V_1 = V_3$. Una base per V_2 si ottiene risolvendo l'equazione ad esempio con parametri liberi z_1 e z_2, e dunque

$$V_2 = \mathrm{Span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

(3.ii) Per quanto osservato precedentemente $V_1 \cap V_2 \cap V_3 = V_1 \cap V_2$. Come si vede immediatamente sostituendo nelle equazioni di V_2, il primo vettore della base di V_1 appartiene a V_2 mentre il secondo no. Quindi $V_1 \cap V_2$ ha dimensione necessariamente uguale a 1, ed una sua base è data da $(1, 0, i)^t$.

(3.iii) La formula di Grassmann stabilisce che

$$\dim V_1 + \dim V_2 = \dim(V_1 + V_2) + \dim(V_1 \cap V_2),$$

e dunque $\dim(V_1 + V_2) = 3$.

(4.i) La matrice di un operatore scritta rispetto a una certa base in partenza e una certa base in arrivo è data come segue: la sua j-esima colonna consiste nelle coordinate nella base di arrivo del trasformato del j-esimo vettore della base di partenza. La matrice cercata è dunque data, per costruzione, da

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(4.ii) Usando l'osservazione appena fatta e osservando che per linearità

$$T \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - T \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad T \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - T \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

abbiamo che

$$T \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad T \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Dunque

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

(5) Il polinomio caratteristico è dato da

$$\det(M - \lambda I) = -\lambda(\lambda - 3)^2.$$

Gli autovalori sono dunque $\lambda = 0$, di molteplicità algebrica 1, e $\lambda = 3$, di molteplicità algebrica 2. Determiniamo ora equazioni cartesiane per gli autospazi V_0 e V_3. Per V_0 abbiamo

$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ 4x + y + 2z = 0 \\ 2x - y + 4z = 0. \end{cases}$$

Inoltre, poiché $\lambda = 0$ è un autovalore sappiamo che $\operatorname{rk} M \leq 2$, Del resto il minore di ordine due in alto a sinistra ha determinante non nullo, quindi $\operatorname{rk} M = 2$, cioè la molteplicità geometrica di $\lambda = 0$ è 1 (e coincide quindi con quella algebrica).

Infine, per V_3 abbiamo come equazioni quelle del sistema lineare omogeneo associato alla matrice $M - 3I$, cioè

$$\begin{cases} -2x + y - z = 0 \\ 4x - 2y + 2z = 0 \\ 2x - y + z = 0. \end{cases}$$

La seconda e la terza equazione sono multiple della prima, quindi la dimensione del nucleo è due. Dunque la molteplicità geometrica di $\lambda = 3$ è due e l'operatore è allora diagonalizzabile.