Geometria
Prova scritta, I appello, sessione invernale
Corso di laurea in fisica — A.A 2017/2018
Canali A – C, L – Pa, Pb – Z

DURATA: 2 ORA E 30 MINUTI

Simone Diverio   Alessandro D'Andrea   Paolo Piccinni
Antonietta Venezia

23 gennaio 2018

Esercizio 1. Si consideri, al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$, il sistema lineare:

$$\begin{cases} -x & +ky & -z & = & k \\ -x & -y & +z & = & -1 \\ (k-1)x & +2ky & -(k+1)z & = & 2k. \end{cases}$$

(i) Scrivere la matrice $A \in M_{3,3}(\mathbb{R})$ dei coefficienti e la matrice $A' \in M_{3,4}(\mathbb{R})$ completa del sistema, e determinare al variare di k il rango di A e il rango di A'.

(ii) Stabilire per quali valori di k il sistema ammette soluzioni e determinare per tali valori tutte le soluzioni.

(iii) Le tre equazioni del sistema rappresentano in $\mathbb{R}^3$ e al variare di k, dei piani affini. Descrivere, al variare di k, la loro intersezione (una retta?, un punto?, insieme vuoto?), scrivendo, per i valori di k per cui si ottiene una retta r, le equazioni parametriche e le equazioni cartesiane di r.

Esercizio 2. Si consideri la matrice $A \in M_{3,3}(\mathbb{R})$ data da

$$A = \begin{pmatrix} -4 & -2 & 2 \\ 6 & 4 & -2 \\ -6 & -2 & 4 \end{pmatrix},$$

e l'operatore lineare ad essa associato

$$L_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3.$$

(i) Calcolare il polinomio caratteristico p_{L_A} associato ad L_A e determinare gli autovalori di L_A.

(ii) Determinare gli autospazi di L_A specificandone in particolare la dimensione.

(iii) Se possibile, determinare una matrice $C \in M_{3,3}(\mathbb{R})$ tale che $C^{-1} \cdot A \cdot C$ è una matrice diagonale e calcolare il risultato di tale prodotto (senza necessariamente calcolare l'inversa) per ottenere un'eventuale forma diagonale per L_A.

Esercizio 3. Sia $V = \mathbb{R}_2[t]$ lo spazio vettoriale reale dei polinomi a coefficienti reali di grado minore o uguale a 2. Verificare o confutare le seguenti affermazioni, eventualmente mediante un controesempio.

(i) Il sottoinsieme $L \subset V$ definito da $L = \{p \in V \mid p'(t) = 2t + 1\}$ è un sottospazio affine.

(ii) Il sottoinsieme $U \subset V$ definito da $U = \{p \in V \mid p(2) \cdot p'(0) = 0\}$ è un sottospazio vettoriale, dove l'apice indica la derivata.

(iii) L'applicazione

$$\begin{aligned} T\colon V &\to V \\ p &\mapsto p(1)\,t^2 + p'(0)\,t + p(-1) \end{aligned}$$

è lineare, e il suo nucleo è banale.

Esercizio 4. Sia $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un'applicazione lineare il cui nucleo ha equazione $x_2 - 2x_3 = 0$; inoltre, supponiamo che

$$T\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}.$$

(i) Determinare una base $\{v_1, v_2\}$ per $\ker T$.

(ii) Verificare che il vettore

$$v_3 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

completa $\{v_1, v_2\}$ a una base $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ di $\mathbb{R}^3$.

(iii) Scrivere la matrice associata a T nella base $\mathcal{B}$.

Esercizio 5. Siano dati i seguenti due sottospazi di $\mathbb{R}^4$:

$$U = \operatorname{Span}\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\0\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\3\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\3\\3\\-1\end{pmatrix}\right\}, \quad W = \operatorname{Span}\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\2\\-2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\3\\2\\-3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\3\\4\\-3\end{pmatrix}\right\}.$$

Determinare equazioni cartesiane per i sottospazi $U + W$ e $U \cap W$.

Soluzioni

Esercizio 1. Per (i), le due matrici sono:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & k & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ k-1 & 2k & -(k+1) \end{pmatrix}, \qquad A' = \begin{pmatrix} -1 & k & -1 & k \\ -1 & -1 & 1 & -1 \\ k-1 & 2k & -(k+1) & 2k \end{pmatrix},$$

e per entrambe la terza riga è data dalla seconda moltiplicata per $-k$ più la prima, mentre le prime due righe sono chiaramente linearmente indipendenti, quale che sia k. In entrambi i casi vi sono dunque solo due righe linearmente indipendenti e $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} A' = 2$.

Per (ii), da quanto sopra e dal teorema di Rouché–Capelli segue subito che il sistema ammette per ogni valore di k infinite soluzioni dipendenti da un parametro. Il sistema è d'altronde equivalente al sistema di due sue equazioni linearmente indipendenti:

$$\begin{cases} -x & +ky & -z & = & k \\ -x & -y & +z & = & -1. \end{cases}$$

Esso può essere risolto ponendo $y = t$ come parametro e ottenendo dunque per ogni k le infinite soluzioni $(x, y, z) = \left(\frac{k-1}{2}t - \frac{k-1}{2}, t, \frac{k+1}{2}t - \frac{k+1}{2}\right)$.

Per (iii), da quanto sopra per ogni valore di k i tre piani appartengono a uno stesso fascio. La retta r asse del fascio dipende da k e ha equazioni parametriche $(x, y, z) = \left(\frac{k-1}{2}t - \frac{k-1}{2}, t, \frac{k+1}{2}t - \frac{k+1}{2}\right)$. Le sue equazioni cartesiane sono le stesse del sistema semplificato:

$$r : \begin{cases} -x & +ky & -z & = & k \\ -x & -y & +z & = & -1 \end{cases}$$

Esercizio 2. Il polinomio caratteristico è dato da

$$p_{L_A}(\lambda) = \det \begin{pmatrix} -4-\lambda & -2 & 2 \\ 6 & 4-\lambda & -2 \\ -6 & -2 & 4-\lambda \end{pmatrix} = -\lambda^3 + 4\lambda^2 - 4\lambda = -\lambda(\lambda - 2)^2.$$

Troviamo dunque che gli autovalori sono $\operatorname{sp}(L_A) = \{0, 2\}$, e sono rispettivamente di molteplicità algebrica 1 e 2.

Determiniamo ora gli autospazi. Si ha

$$\mathbb{R}^3_0 = \ker A = \ker \begin{pmatrix} -4 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

e

$$\mathbb{R}^3_2 = \ker(A - 2\,\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}) = \ker \begin{pmatrix} -6 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

dove le ultime uguaglianze seguono da un'eliminazione di Gauss. Troviamo quindi

$$\mathbb{R}^3_0 = \operatorname{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad \mathbb{R}^3_2 = \operatorname{Span}\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

In particolare le molteplicità geometriche degli autovalori sono rispettivamente 1 e 2, e coincidono con le molteplicità algebriche. Dunque L_A è diagonalizzabile. I vettori

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

forniscono una base di autovettori. Dunque la matrice

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

assolve al compito richiesto e si ha

$$C^{-1} \cdot A \cdot C = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 2 & \\ & & 2 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 3. Per (i), L è effettivamente un sottospazio affine. Un modo di vederlo è che è la preimmagine del polinomio $2t+1$ tramite l'applicazione lineare $V \to V$ data dalla derivazione di polinomi. Oppure, più esplicitamente, L è l'insieme di tutti i polinomi che hanno derivata $2t + 1$, cioè tutti i polinomi della forma $t^2 + t + c$, al variare di $c \in \mathbb{R}$, vale a dire tutti i polinomi della forma $t^2 + t$ più un polinomio di grado zero. Ora, è immediato verificare che $W = \{p \in V \mid \deg p = 0\} \simeq \mathbb{R}$ è un sottospazio vettoriale di V. Ma allora

$$L = (t^2 + t) + W$$

è somma di un sottospazio vettoriale con un elemento di V, dunque un sottospazio affine per definizione.

Per (ii), il sottoinsieme U *non* è un sottospazio. Un controesempio è fornito dai seguenti due polinomi, che appartengono entrambi a U, ma la cui somma non vi appartiene:

$$p = 1, \quad q = t - 2.$$

Infatti, $p(2) = 1$, $p'(0) = 0$, $q(2) = 0$, e $q'(0) = 1$. Dunque $p(2)p'(0) = 0$ e $q(2)q'(0) = 0$, cioè $p, q \in U$. Ma

$$(p + q)(2)(p + q)'(0) = \big(p(2) + q(2)\big)\big(p'(0) + q'(0)\big) = 1 \cdot 1 = 1 \neq 0.$$

Per (iii), l'applicazione T è lineare, infatti dati comunque $p, q \in V$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, si ha

$$\begin{aligned} T(\alpha\, p + \beta\, q) &= (\alpha\, p + \beta\, q)(1)\, t^2 + (\alpha\, p + \beta\, q)'(0)\, t + (\alpha\, p + \beta\, q)(-1) \\ &= \big(\alpha\, p(1) + \beta\, q(1)\big)\, t^2 + \big(\alpha\, p'(0) + \beta\, q'(0)\big)\, t + \alpha\, p(-1) + \beta\, q(-1) \\ &= \alpha\, p(1)\, t^2 + \alpha\, p'(0)\, t + \alpha\, p(-1) + \beta\, q(1)\, t^2 + \beta\, q'(0)\, t + \beta\, q(-1) \\ &= \alpha\big(p(1)\, t^2 + p'(0)\, t + p(-1)\big) + \beta\big(q(1)\, t^2 + q'(0)\, t + q(-1)\big) \\ &= \alpha\, T(p) + \beta\, T(q). \end{aligned}$$

La seconda affermazione è invece falsa: per confutarla basta trovare un polinomio di grado al più due, non nullo, che si annulli in 1 e -1 e che abbia derivata nulla in 0. Un controesempio è dunque fornito da $p(t) = t^2 - 1$.

Esercizio 4. Una base del nucleo è ottenuta prendendo x_1 e x_3 come parametri liberi nell'equazione cartesiana del nucleo. Per il punto (i), possiamo quindi prendere ad esempio come v_1 e v_2 i vettori

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Calcolando il determinante

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 1 \neq 0$$

si ottiene immediatamente il punto (ii).

Per il punto (iii), la matrice cercata contiene nella colonna j, $j = 1, 2, 3$, le coordinate di $T(v_j)$ nella base $\mathcal{B}$. Ora,

$$T(v_1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad T(v_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad T(v_3) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = v_1 + v_2.$$

Dunque la matrice cercata è

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 5. Per determinare equazioni cartesiane rispettivamente per U e W, utilizziamo l'eliminazione di Gauss nella forma

$$\left(\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \end{array}\right) \begin{array}{c} x \\ y \\ z \\ t \end{array} \quad \xrightarrow{\text{E.G.}} \quad \left(\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} x \\ y - x \\ z - 3y + 3x \\ 2x + t - y \end{array}$$

e

$$\left(\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 4 \\ -2 & -3 & -3 \end{array}\right) \begin{array}{c} x \\ y \\ z \\ t \end{array} \quad \xrightarrow{\text{E.G.}} \quad \left(\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} x \\ y - 2x \\ 2x - 2y + z \\ y + t \end{array}$$

Otteniamo dunque

$$U = \begin{cases} 3x - 3y + z = 0 \\ 2x - y + t = 0, \end{cases} \qquad W = \begin{cases} 2x - 2y + z = 0 \\ y + t = 0. \end{cases}$$

Notare che la stessa eliminazione di Gauss ci dice inoltre che i primi due vettori che generano U ne danno una base, così come per W.

Ora, un sistema di equazioni cartesiane (non minimale) per $U \cap W$ è semplicemente fornito da

$$U \cap W = \begin{cases} 3x - 3y + z = 0 \\ 2x - y + t = 0 \\ 2x - 2y + z = 0 \\ y + t = 0. \end{cases}$$

Un sistema di generatori per $U + W$ è invece dato da

$$U + W = \operatorname{Span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \right\}.$$

Si vede subito che i primi tre vettori scritti sono linearmente indipendenti, infatti

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} = -1 \neq 0.$$

Inoltre l'ultimo è somma del primo e del terzo, quindi una base è data dai primi tre vettori. Equazioni cartesiane per $U+W$ si ottengono ad esempio imponendo che il seguente determinante si annulli identicamente:

$$\det \begin{pmatrix} x & y & z & t \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & -2 \end{pmatrix} = -4x + 5y - 2z + t = 0.$$