Geometria
Prova scritta, I appello, sessione estiva
Corso di laurea in fisica — A.A 2017/2018
Canali A – C, e L – Pa

DURATA: 2 ORE E 30 MINUTI

Simone Diverio   Alessandro D'Andrea   Paolo Piccinni

25 giugno 2018

Esercizio 1. Al variare di $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, si studi il seguente sistema:

$$\begin{cases} x + \alpha y + z = \beta^2 \\ \alpha x + y + z = \beta \\ x + y + z = 1. \end{cases}$$

Determinare, in particolare, i valori di $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ per cui il sistema risulta compatibile, e per tali valori esplicitare l'insieme delle soluzioni.

Esercizio 2. Sia data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 14 & -13 & 4 \end{pmatrix},$$

e l'operatore lineare ad essa associato

$$L_A \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3.$$

Descrivere immagine e nucleo di L_A, trovare autovalori ed autospazi di L_A, e determinare se è diagonalizzabile.

Esercizio 3. Sia $V = \{f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$ lo spazio vettoriale delle funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$, dotato delle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare. Determinare quali dei seguenti sottoinsiemi di V sono sottospazi vettoriali di V.

(i) Il sottoinsieme $W_1 \subset V$ definito da $W_1 = \{f \in V \mid f(0) = 0\}$.

(ii) Il sottoinsieme $W_2 \subset V$ definito da $W_2 = \{f \in V \mid f(0)f(1) = 0\}$.

(iii) ll sottoinsieme $W_3 \subset V$ definito da $W_3 = \{f \in V \mid \text{esiste } M > 0$ dipendente da f tale che $f(x) = 0$ se $x > M\}$.

Esercizio 4. Determinare un'applicazione lineare suriettiva $T\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ tale che $\ker T = \operatorname{Span}\{e_1 + e_2 + e_3\}$.

Dire se è possibile o meno, giustificando la risposta, determinare un'applicazione lineare $S\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ iniettiva e tale che $\operatorname{Im} S = \operatorname{Span}\{2e_1 + e_3, -e_1\}$.

Esercizio 5. Siano dati i seguenti due sottospazi di $\mathbb{R}^4$:

$$U = \operatorname{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}, \quad W = \operatorname{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Determinare basi per U, W, $U + W$, e dimensione di $U \cap W$.

Soluzioni

Esercizio 1. La matrice dei coefficienti è

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 1 \\ \alpha & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

ed il suo determinante vale $\det A = -(\alpha - 1)^2$. Dunque, se $\alpha \neq 1$ il sistema ammette una e una sola soluzione data da

$$x = \frac{\beta - 1}{\alpha - 1}, \quad y = \frac{\beta^2 - 1}{\alpha - 1}, \quad z = -\frac{\beta^2 + \beta - \alpha - 1}{\alpha - 1}.$$

Se invece $\alpha = 1$, il rango di A è chiaramente 1. La matrice completa

$$A|b = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \beta^2 \\ 1 & 1 & 1 & \beta \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

ha anch'essa rango uno se e solo se la quarta colonna appartiene allo spazio generato dalle prima tre, cioè se la quarta colonna è un multiplo di una qualunque delle prime tre colonne. Ciò può accadere solo se $\beta = 1$. Quindi per $\alpha = \beta = 1$ il sistema è ancora compatibile è lo spazio delle soluzioni ha dimensione $3 - 1 = 2$. Le soluzioni sono date in questo caso da

$$x = 1 - s - t, \quad y = s, \quad z = t,$$

al variare di $s, t \in \mathbb{C}$. Per gli altri valori di β il sistema è invece incompatibile.

Esercizio 2. Effettuando un'eliminazione di Gauss sulla matrice A otteniamo

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 14 & -13 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{E.G.}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 27 & -18 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Da cui deduciamo che

$$\operatorname{Im} L_A = \operatorname{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 14 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -13 \end{pmatrix} \right\},$$

e

$$\ker L_A = \operatorname{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}.$$

Per gli autovalori calcoliamo

$$\det(A - \lambda I) = -\lambda(\lambda - 3)^2.$$

Abbiamo dunque l'autovalore $\lambda = 0$ con molteplicità algebrica 1 e l'autovalore $\lambda = 3$ con molteplicità algebrica 2. Inoltre la molteplicità geometrica dell'autovalore nullo coincide con $\dim \ker L_A = 1$ che è dunque uguale alla molteplicità algebrica.

Invece la molteplicità geometrica dell'autovalore 3 è data dalla dimensione del nucleo della matrice

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 14 & -13 & 1 \end{pmatrix},$$

la quale ha chiaramente rango 2 (il determinante è nullo per costruzione mentre il primo minore 2×2 in alto a sinistra è non nullo). La molteplicità geometrica è dunque $3 - 2 = 1 < 2$. L'operatore L_A non è dunque diagonalizzabile.

Esercizio 3. L'insieme W_1 è un sottospazio vettoriale. Infatti per ogni $f, g \in W_1$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ abbiamo

$$(\alpha f + \beta g)(0) = \alpha f(0) + \beta g(0) = 0.$$

L'insieme W_2 invece non è un sottospazio vettoriale: ad esempio infatti le funzioni $f(x) = x$ e $g(x) = x - 1$ appartengono entrambe a W_2 ma la loro somma non appartiene a W_2.

Infine, l'insieme W_3 è un sottospazio vettoriale. Infatti per ogni $f, g \in W_1$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ abbiamo che se $f(x) = 0$ per ogni $x > M_1$ e $g(x) = 0$ per ogni $x > M_2$, allora

$$(\alpha f + \beta g)(x) = \alpha f(x) + \beta g(x) = 0, \quad \forall x > M := \max\{M_1, M_2\}.$$

Esercizio 4. Per costruire T si può ad esempio procedere come segue. Si completi $v_1 = e_1 + e_2 + e_3$ ad una base di $\mathbb{R}^4$. Sia essa data da

$$\{v_1 = e_1 + e_2 + e_3, v_2, v_3, v_4\}.$$

Sia $\{f_1, f_2, f_3\}$ una base di $\mathbb{R}^3$. Allora esiste un'unica applicazione lineare T tale che

$$T(v_1) = 0, \quad T(v_2) = f_1, \quad T(v_3) = f_2, \quad T(v_4) = f_3.$$

Tale applicazione ha le proprietà richieste.

Un'applicazione lineare S come richiesto non può esistere. Infatti un'applicazione lineare iniettiva tra due spazi della stessa dimensione è un isomorfismo e quindi non può avere nucleo non banale.

Esercizio 5. I generatori di U non sono uno multiplo dell'altro e danno quindi una base per U. I tre vettori che generano W invece sono dipendenti (la matrice che essi formano come colonne ha due righe di zeri). Due qualunque tra loro non sono multipli uno dell'altro e quindi forniscono una base: scegliamo ad esempio il primo e l'ultimo. La somma $U + W$ è generata ad esempio dalla base scelta per U unita a quella scelta per W. Se si usano questi generatori come colonne di una matrice si ottiene

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

che ha rango 3 (ha due righe uguali, e il minore tagliato da prima, seconda e quarta riga e prima, seconda e terza colonna è diverso da zero). In particolare, le prime tre colonne forniscono una base per la somma.

L'intersezione ha dunque dimensione 1, per la formula di Grassmann.