Geometria per Fisica (Canale L-Pa)

Foglio 1 - Esercitazione in classe del 04.10.2019

Esercizio 1. Dimostrate che $\sqrt{3}$ è irrazionale.
[Suggerimento: si assuma per assurdo $\sqrt{3} = \frac{n}{m}$ con $n, m \in \mathbb{N}$ primi tra loro. Allora ...]

Esercizio 2. Dimostrate che ogni equazione algebrica di grado dispari a coefficienti reali

$$P(x) = a_{2n+1}x^{2n+1} + a_{2n}x^{2n} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0,$$

dunque con $a_{2n+1}, a_{2n}, \ldots, a_1, a_0 \in \mathbb{R}$ e $a_{2n+1} \neq 0$, ammette una soluzione reale.
[Suggerimento: Sia α una soluzione complessa, che esiste per il teorema fondamentale dell'algebra, e sia $\bar{\alpha}$ il suo complesso coniugato. Dimostrate in primo luogo che anche $\bar{\alpha}$ è soluzione della stessa equazione. Contate poi le soluzioni.]

Esercizio 3. Sia

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$$

un polinomio a coefficienti complessi, con $a_n \neq 0$, e siano $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{C}$ i suoi zeri (non necessariamente tutti distinti). Dimostrate che vale la seguente identità:

$$P(z) = a_n(z - \alpha_1)(z - \alpha_2)\ldots(z - \alpha_n).$$

[Suggerimento: Sia α una radice di $P(z)$. Eseguendo la divisione con il polinomio $(z - \alpha)$ si ottiene un quoziente $Q(z)$ di grado $n - 1$ e la divisione ha resto r di grado 0, ovvero r è una costante .....]

Esercizio 4. Stabilite, per ognuna delle seguenti applicazioni tra insiemi, se si tratta di un'applicazione suriettiva, iniettiva o biunivoca

1) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = x^3$.
2) $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definita da $g(z) = z^3$.
3) $h : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ definita da $h(z) = |z|$ (modulo di z).
4) $k : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definita da $k(z) = \bar{z}$ (coniugato di z).

Esercizio 5. Risolvete in $\mathbb{C}$ le seguenti equazioni:

i) $z^4 + 1 = 0$,
ii) $z^3 - iz^2 + iz + 1 = 0$,
iii) $z^5 + 2z^3 + z = 0$.

Esercizio 6. Considerate i seguenti sistemi lineari

$$(1) \left\{ \begin{array}{rl} x + y + z = & 1 \\ x + y - z = & 0 \\ 3x + 3y + 13z = & 8 \\ 5x + 5y - 9z = & -2 \\ 5x + 5y + 2z = & 3 \end{array} \right. \qquad \text{e} \qquad (2) \left\{ \begin{array}{r} x + y + z = 0 \\ x + y - z = 0 \\ 3x + 3y + 13z = 0 \\ 5x + 5y - 9z = 0 \\ 5x + 5y + 2z = 0 \end{array} \right.$$

e osservate che il sistema (2) è il sistema lineare "omogeneo associato" al sistema (1).

i) Stabilite se il sistema (1) ammette soluzioni.
ii) Stabilite se il sistema (2) ammette soluzioni.