Geometria per Fisica (Canale L-Pa)

Foglio 5 - Esercitazione in classe del 6.12.2019

Esercizio 1. Sia assegnato l'endomorfismo $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, definito da

$$F(x_1, x_2, x_3, x_4) = (-x_1, 3x_2, 4x_2 - x_3, x_4),$$

essendo $\vec{v} = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$.

i) Determinare la matrice A associata a F rispetto alla base canonica $\mathbb{E} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4)$ di $\mathbb{R}^4$.

ii) Determinare gli autovalori di F e una base $\mathbb{E}' = (\vec{v}_1', \vec{v}_2', \vec{v}_3', \vec{v}_4')$ di V costituita da autovettori di F. Dedurne che la matrice A è diagonalizzabile.

iii) Detta A' la matrice diagonale associata a F nella base $\mathbb{E}'$, determinare una matrice invertibile C tale che risulti $A' = C^{-1}AC$.

Esercizio 2. Si consideri l'endomorfismo $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ che ha per autovettori i seguenti vettori

$$\vec{v}_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right), \quad \vec{v}_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right), \quad \vec{v}_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}\right)$$

relativi agli autovalori rispettivamente $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = 2$.

i) Scrivere la matrice A che rappresenta T nella base $\mathcal{B} = (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$.

ii) Scrivere la matrice A' che rappresenta T nella base canonica $\mathbb{E} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ di $\mathbb{R}^3$.

iii) Quanto vale $\det(A')$? E la traccia di A'? E il polinomio caratteristico di A'?

iv) Si consideri ora l'endomorfismo composizione $T^2 = T \circ T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. T^2 è invertibile?

v) Quali sono i suoi autovalori di T^2? L'endomorfismo T^2 è diagonalizzabile?

Suggerimento: si può rispondere alle domande iii),iv),v) senza trovare la matrice richiesta al punto ii).

Esercizio 3. Sia assegnata la matrice $A_k = \begin{pmatrix} -2 & 5 & -3 \\ -3 & 6 & -3 \\ -1 & k & 0 \end{pmatrix}$, essendo k un parametro reale.

i) Determinare il valore di k per cui A_k ammette come autovalore $\lambda = 0$, e si denoti con A la matrice che si ottiene per tale valore di k.

ii) Verificare che A è una matrice diagonalizzabile.

iii) Determinare una matrice invertibile C che diagonalizza A, ossia tale che $C^{-1}AC$ sia una matrice diagonale.

Esercizio 4. Si considerino in $\mathbb{R}^3$ i vettori

$$\vec{v}_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right), \quad \vec{v}_2 = \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

i) Verificare che $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ sono ortonormali e determinare il loro prodotto vettoriale $\vec{v}_3 = \vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2$.

ii) Si consideri l'endomorfismo $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definito dalle condizioni $T(\vec{v}_1) = \vec{v}_2,\ T(\vec{v}_2) = \vec{v}_3,\ T(\vec{v}_3) = \vec{v}_1$. Determinare il nucleo di T. Scrivere la matrice M che rappresenta T nella base $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$.

iii) Scrivere la matrice N che rappresenta T nella base canonica $\mathbb{E} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ di $\mathbb{R}^3$.

iv) Determinare gli autovalori reali di T, e (usando le coordinate canoniche di $\mathbb{R}^3$) le equazioni cartesiane degli autospazi di T.