# Geometria per Fisica (Canale L-Pa)

Foglio 3 - Esercitazione in classe del 8.11.2019

**Esercizio 1.** Dati gli insiemi:

$$Z_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x + y = 0\}, \quad Z_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x + z = 1\},$$
$$Z_3 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x + y = 0, x + z = 1\},$$
$$Z_4 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 + z^2 = 0\}, \quad Z_5 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

stabilire quali $Z_i$ $(i = 1,2,3,4,5)$ sono sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^3$. Per ognuno dei sottospazi vettoriali determinare una base.

**Esercizio 2.** Spazio vettoriale $V = M_2(\mathbb{R})$ = matrici quadrate reali di ordine 2.

i) Verificare che il sottoinsieme $U = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}, \ x_2 + x_3 = 0 \right\}$ è un sottospazio vettoriale di $V$.

ii) Determinare una base $\mathcal{B}_U$ di $U$.

iii) Deteminare una base di un sottospazio vettoriale $W$ di $V$ tale che $V = U \oplus W$.

**Esercizio 3**. Spazio vettoriale reale $\mathbb{R}^4$. Si considerino i sottospazi $U = Span(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$, essendo $\vec{u}_1 = (1,-1,1,0)$, $\vec{u}_2 = (1,-1,0,-1)$, $\vec{u}_3 = (0,0,1,1)$, e sia $W$ il sottospazio vettoriale costituito dalle soluzioni del sistema lineare omogeneo

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 & = 0 \\ x_1 + x_2 - x_4 & = 0 \end{cases}$$

Determinare una base per ciascuno dei sottospazi $U$, $W$ e $U \cap W$. Dedurne che $V = U \oplus W$.

**Esercizio 4**. Si consideri l'applicazione $F : M_n(K) \to M_n(K)$ data da $F(A) = A + A^t$, essendo $A^t$ la trasposta di $A$.

i) Verificare che $F$ è un'applicazione lineare di spazi vettoriali.

ii) Determinare i sottospazi vettoriali di $M_n(K)$ che sono rispettivamente nucleo e immagine di $F$.

**Esercizio 5.** Siano $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ e sia

$$AB = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix}$$

il loro prodotto righe per colonne.

Stabilire quali tra le seguenti affermazioni sono vere per ogni scelta di $A, B \in M_2(\mathbb{R})$, dandone dimostrazione in caso di risposta affermativa, o fornendo un controesempio in caso di risposta negativa.

i) $(AB)^t = A^t B^t$.

ii) $(AB)^t = B^t A^t$.

iii) $A(B^t) = B(A^t)$.

iv) tr $[A(B^t)]$ = tr $[B(A^t)]$ [si ricordi che la traccia di una matrice quadrata è la somma degli elementi della sua diagonale principale: se $C = (c_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$, allora la traccia è tr $C = c_{11} + c_{22} + \cdots + c_{nn}$].

v) Per ogni $A \in M_2(\mathbb{R})$, la matrice $AA^t$ è simmetrica.

vi) Le risposte date nei precedenti punti i), ii), iii), iv), v) valgono anche per $A, B \in M_n(\mathbb{R})$? [Motivare la risposta]

**Esercizio 6**. Spazi vettoriali numerici reali $\mathbb{R}^4$ e $\mathbb{R}^3$. Siano assegnate le applicazioni lineari $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ e $G : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$, definite rispettivamente da

$$F(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 - x_2, x_2 + x_4, x_1 + x_2 + x_3 + x_4) = (y_1, y_2, y_3),$$
$$G(y_1, y_2, y_3) = (y_1 + y_2 - y_3, y_1 + y_2, y_2 - y_3, y_1 - y_2) = (x_1, x_2, x_3, x_4).$$

i) Determinare la matrice $A$ associata a $F$ rispetto alle basi canoniche di $\mathbb{R}^4$ e di $\mathbb{R}^3$, e la matrice $B$ associata a $G$ rispetto alle basi canoniche di $\mathbb{R}^3$ e di $\mathbb{R}^4$. [In altri termini, determinare le matrici $A$ e $B$ tali che $F = L_A : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$, $G = L_B : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$].

ii) Considerata l'applicazione lineare composta $G \circ F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, determinare la matrice $C$ associata a $G \circ F$ nella base canonica di $\mathbb{R}^4$ $[G \circ F = L_C : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4]$, e scrivere le equazioni di $G \circ F$ come trasformazione lineare in $\mathbb{R}^4$.

iii) Determinare dimensione e basi dei due sottospazi vettoriali im $(G \circ F)$ e ker $(G \circ F)$. $G \circ F$ è invertibile?