Geometria per Fisica (Canale L-Pa)

Foglio 6 - Esercitazione in classe del 14.01.2020

Esercizio 1. Si considerino le matrici:

$$A=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 0 & 5 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

i) Stabilire quali tra le matrici A, B, C sono ortogonali.

ii)) Stabilire quali tra le matrici A, B, C ammettono l'autovalore $\lambda = 1$, e per esse determinarne il relativo autospazio.

Esercizio 2. Si considerino le matrici:

$$A=\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},$$

e si osservi che A, B sono simmetriche e dunque diagonalizzabili.

i) Sono simmetriche anche i quadrati $A^2 = AA, B^2 = BB$ e i prodotti AB, BA?

ii) Sono diagonalizzabili anche i quadrati $A^2 = AA, B^2 = BB$ e i prodotti AB, BA?

iii) Determinare "radici quadrate" di A e di B, ovvero matrici E e F tali che $E^2 = A$, $F^2 = B$.

Esercizio 3.

i) Stabilire per quali valori di $t \in \mathbb{C}$ è diagonalizzabile la matrice $A=\begin{pmatrix} i & t & 0 \\ 0 & t & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

ii) Sostituendo $t = -i$ si determini una matrice non singolare N tale che $N^{-1}AN$ sia diagonale.

Esercizio 4. Si consideri la forma bilineare simmetrica

$$g : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$$

definita sui vettori $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4), \vec{y} = (y_1, y_2, y_3, y_4) \in \mathbb{R}^4$ da

$$g(\vec{x}, \vec{y}) = x_1y_4 + x_2y_3 + x_3y_2 + x_4y_1.$$

i) Scrivere la matrice

$$G = \big(g_{\alpha\beta} = g(\vec{e}_\alpha, \vec{e}_\beta)\big)$$

associata a g nella base canonica $\vec{e}_1 = (1, 0, 0, 0), \vec{e}_2 = (0, 1, 0, 0), \vec{e}_3 = (0, 0, 1, 0), \vec{e}_4 = (0, 0, 0, 1)$ di $\mathbb{R}^4$.

ii) Stabilire se la matrice G è ortogonale e se l'operatore lineare $L_G : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ associato a B è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$.

Esercizio 5. Si consideri ora l'applicazione

$$h : \mathbb{C}^4 \times \mathbb{C}^4 \to \mathbb{C}$$

definita sui vettori $\vec{z} = (z_1, z_2, z_3, z_4), \vec{w} = (w_1, w_2, w_3, w_4) \in \mathbb{C}^4$ da

$$h(\vec{z}, \vec{w}) = z_1\bar{w}_4 + iz_2\bar{w}_3 - iz_3\bar{w}_2 + z_4\bar{w}_1.$$

i) Verificare che h è hermitiana, ovvero che $h(\vec{z}, \vec{w}) = \overline{h(\vec{w}, \vec{z})}$, scrivere la matrice

$$H = \big(h_{\alpha\beta} = h(\vec{e}_\alpha, \vec{e}_\beta)\big)$$

associata a h nella base canonica $\vec{e}_1 = (1, 0, 0, 0), \vec{e}_2 = (0, 1, 0, 0), \vec{e}_3 = (0, 0, 1, 0), \vec{e}_4 = (0, 0, 0, 1)$ di $\mathbb{C}^4$.

ii) Stabilire se la matrice H è hermitiana e se è unitaria.

iii) Detto $L_H : \mathbb{C}^4 \to \mathbb{C}^4$ l'operatore lineare associato a H, determinare i suoi autovalori e precisare se esiste una base ortonormale $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4)$ di $\mathbb{C}^4$ formata da suoi autovettori.