Geometria per Fisica

Foglio n. 4 - Prova autovalutativa di metà semestre - Esercitazione in classe del 27 novembre 2019

Canali A – C, D – K, L-Pa

(Proff. P. Bravi, S. Diverio, P. Piccinni)

Esercizio 1. Discutere, al variare del parametro $\lambda \in \mathbb{C}$, la compatibilità del seguente sistema lineare di 3 equazioni in 3 incognite, a coefficienti complessi.

$$\begin{cases} z_1 + \lambda z_2 = 0 \\ -iz_1 + z_2 = i \\ \lambda z_1 + z_2 + iz_3 = 0. \end{cases}$$

Per i valori di λ per cui il sistema risulta compatibile determinare l'insieme delle soluzioni.

Esercizio 2. Siano dati in $\mathbb{R}^3$ i due sottospazi vettoriali

$$U = \operatorname{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad W = \operatorname{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Dimostrare che $\mathbb{R}^3 = U \oplus W$ e determinare l'espressione in coordinate dell'applicazione lineare

$$\pi_W^U \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,$$

proiezione su W parallelamente a U.

Esercizio 3. Determinare l'espressione in coordinate dell'unica applicazione lineare

$$T \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$$

tale che

$$T \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad T \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad T \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Determinare inoltre una base per $\ker T$ e descrivere $\operatorname{Im} T$.