Geometria per Fisica (Canale L-Pa)

Foglio 2 - Esercitazione in classe del 18.10.2019

Esercizio 1. Si consideri, al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$, il sistema lineare:

$$\begin{cases} kx & +ky & -kz & = & k \\ -x & +ky & -z & = & k \\ -x & -y & +z & = & -1 \\ (k-1)x & +2ky & -(k+1)z & = & 2k \end{cases}$$

i) Scrivete la matrice $A \in M_{(4,3)}(\mathbb{R})$ dei coefficienti e la matrice $A' \in M_{(4,4)}(\mathbb{R})$ dei coefficienti e termini noti del sistema, e determinate al variare di k il rango di A e il rango di A'.

ii) Stabilite per quali valori di k il sistema ammette soluzioni e determinate per tali valori tutte le soluzioni.

iii) Le quattro equazioni del sistema rappresentano in $\mathbb{R}^3$ e al variare di k, dei piani. Descrivete, al variare di k, la loro intersezione (una retta? un punto? insieme vuoto?), scrivendo, per i valori di k per cui si ottiene una retta r, le equazioni parametriche e le equazioni cartesiane di r.

Esercizio 2. Si consideri il seguente **sistema lineare omogeneo** di m equazioni in n incognite a coefficienti $a_{ij} \in \mathbb{R}$:

$$(\star) \quad \begin{cases} a_{11}x_1 & +a_{12}x_2 & +\dots & +a_{1n}x_n & = & 0 \\ a_{21}x_1 & +a_{22}x_2 & +\dots & +a_{2n}x_n & = & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & & \\ a_{m1}x_1 & +a_{m2}x_2 & +\dots & +a_{mn}x_n & = & 0 \end{cases}$$

i) Verificate che se le n-ple $\vec{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ e $\vec{z} = (z_1, z_2, \dots, z_n)$ sono soluzioni del sistema $(\star)$, allora per ogni scelta $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ risulta che anche la combinazione lineare

$$\alpha\vec{y} + \beta\vec{z} = (\alpha y_1 + \beta z_1, \alpha y_2 + \beta z_2, \dots, \alpha y_n + \beta z_n)$$

è soluzione del sistema $(\star)$.

ii) La proprietà verificata al punto i) può esprimersi dicendo che le soluzioni del sistema $(\star)$ costituiscono un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$?

iii) Si può affermare che le soluzioni di un qualunque sistema lineare (anche non omogeneo) a coefficienti reali e con n incognite costituiscono un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$?

Esercizio 3. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}_{\leq 3}[x]$ dei polinomi a coefficienti reali di grado ≤ 3 nell'indeterminata x, stabilite se i seguenti insiemi di polinomi sono linearmente indipendenti e se costituiscono sistemi di generatori per $\mathbb{R}_{\leq 3}[x]$:

a) $a_1(x) = 1 + x,\ a_2(x) = 1 + x + x^2,\ a_3(x) = 1 + x + x^2 + x^3$

b) $b_1(x) = 1 + x,\ b_2(x) = 1 + x + x^2,\ b_3(x) = 1 + x + x^2 + x^3,\ b_4(x) = 1 + x + 2x^2 + x^3$

c) $c_1(x) = 1 + x,\ c_2(x) = 1 + x + x^2,\ c_3(x) = 1 + x + x^2 + x^3,\ c_4 = 1 + x^3$

Esercizio 4. Nello spazio vettoriale $M_2(\mathbb{R})$ delle matrici 2×2 a coefficienti reali, stabilite se i seguenti insiemi di matrici sono linearmente indipendenti e se costituiscono sistemi di generatori per $M_2(\mathbb{R})$:

a) $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

b) $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ B_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},\ B_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

c) $C_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ C_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ C_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},\ C_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$