Cognome: .... **Nome:** ....

GEOMETRIA I (Canale I-Z, Prof. P. Piccinni) - Prova scritta del 25.9.2015

Norme per le prove in itinere e le prove scritte d'esame

1. Scrivere subito cognome, nome su questo foglio.
2. Utilizzare la parte bianca (fronte e retro) di questi fogli per la bella copia. I fogli protocollo distribuiti a parte saranno invece utilizzati per la minuta e non devono essere consegnati.
3. **Svolgere gli esercizi con ordine e completezza, dando breve indicazione del procedimento e dei calcoli eseguiti, senza far riferimento alla minuta. Nel giudizio si terrà conto della chiarezza di esposizione.**
4. Durante le prove non si possono consultare testi e appunti, né utilizzare calcolatrici o telefoni cellulari.
5. La durata della prova è di **2 ore e 15 minuti**. Durante la prova non è consentito uscire dall'aula.

Esercizio	Punti totali	Punteggio
1	7	
2	8	
3	7	
4	8	
Totale	30	

DARE INDICAZIONE DEL PROCEDIMENTO E CALCOLI ANCHE UTILIZZANDO IL RETRO DI OGNI SINGOLO FOGLIO

Esercizio 1. Nello spazio vettoriale $V = \mathbb{R}[x]$ dei polinomi a coefficienti reali nell'indeterminata x si considerino i sottospazi vettoriali

$$U = \text{ Span } \{P_1(x) = x^4,\ P_2(x) = x^4 - x^2,\ P_3(x) = x^4 + x^2\},$$
$$W = \text{ Span } \{Q_1(x) = x^3,\ Q_2(x) = x^3 - 2x^2,\ Q_3(x) = x^3 + 2x^2\}.$$

i) Determinare le dimensioni di U e di W. Determinare poi basi di $U \cap W$, di $U + W$, e le loro dimensioni.

ii) Stabilire se le formule

$$T(P_1(x)) = Q_1(x), \quad T(P_2(x)) = Q_2(x), \quad T(P_3(x)) = Q_3(x)$$

definiscono un'applicazione lineare $T : U \to W$, giustificando la risposta. In caso affermativo, determinare poi $\ker T$ e $\operatorname{im} T$.

iii) T è suriettivo? E' iniettivo?

Esercizio 2. Si considerino nel piano proiettivo $\mathbb{R}P^2$, con coordinate proiettive omogenee $[x_0, x_1, x_2]$, i punti

$$P_0 = [1, 0, 0], \quad P_1 = [0, 1, 0], \quad P_2 = [0, 0, 1], \quad P_3 = [1, 1, 1],$$

e

$$P_0' = P_0 = [1, 0, 0], \quad P_1' = [1, -1, 0], \quad P_2' = [2, -1, 1], \quad P_3' = P_2 = [0, 0, 1].$$

i) Verificare che le quaterne (P_0, P_1, P_2, P_3) e (P_0', P_1', P_2', P_3') sono in posizione generale, ovvero che i loro punti sono a tre a tre linearmente indipendenti.

ii) Scrivere le equazioni $[x_0, x_1, x_2] \to [x_0', x_1', x_2']$ della proiettività $\mathcal{P}$ che manda P_0, P_1, P_2, P_3 ordinatamente in P_0', P_1', P_2', P_3'.

iii) Determinare, se esistono, una o più rette $r, r', \ldots$ in $\mathbb{R}P^2$ tali che $\mathcal{P}(r) = r$, $\mathcal{P}(r') = r', \ldots$ scrivendone l'equazione cartesiana.

Esercizio 3. Si consideri nel piano affine, con coordinate cartesiane (x, y) la conica

$$\mathcal{C} : f(x, y) = x^2 + y^2 - 2xy + 4x - 4y + 6 = 0.$$

i) Si determini il tipo proiettivo e affine di $\mathcal{C}$ come conica complessa e come conica reale.

ii) Determinare il cambiamento di riferimento affine (ovvero la trasformazione delle coordinate) che consente di scrivere $\mathcal{C}$ in forma canonica affine.

iii) $\mathcal{C}$ ammette punti reali? (motivare la risposta).

Esercizio 4. Nel piano proiettivo complesso $\mathbb{C}P^2$, con coordinate omogenee $[x_0, x_1, x_2]$, si consideri la quartica

$$\mathcal{C} : (2x_0^2 - 2x_0x_1 - x_0x_2 + x_1x_2)(5x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 - 2x_0x_1 - 4x_0x_2) = 0,$$

evidentemente spezzata in due coniche.

i) Verificare che di fatto $\mathcal{C}$ si spezza in quattro rette r, r', r'', r''' e che esse appartengono ad uno stesso fascio, determinando le coordinate del loro comune punto P_0.

ii) Determinare il birapporto $\beta(r, r', r'', r''')$ delle quattro rette e il loro modulo $j(\beta) = \frac{(\beta^2-\beta+1)^3}{\beta^2(\beta-1)^2}$.