Geometria per Fisica (Canale L-Pa)

Foglio 5 - Soluzioni dell'esercitazione in classe del 6.12.2019

Esercizio 1. Sia assegnato l'endomorfismo $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, definito da

$$F(x_1, x_2, x_3, x_4) = (-x_1, 3x_2, 4x_2 - x_3, x_4),$$

essendo $\vec{v} = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$.

i) Determinare la matrice A associata a F rispetto alla base canonica $\mathbb{E} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4)$ di $\mathbb{R}^4$.

ii) Determinare gli autovalori di F e una base $\mathbb{E}' = (\vec{v}_1', \vec{v}_2', \vec{v}_3', \vec{v}_4')$ di V costituita da autovettori di F. Dedurne che la matrice A è diagonalizzabile.

iii) Detta A' la matrice diagonale associata a F nella base $\mathbb{E}'$, determinare una matrice invertibile C tale che risulti $A' = C^{-1}AC$.

Soluzione esercizio 1.

Esercizio 2. Si consideri l'endomorfismo $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ che ha per autovettori i seguenti vettori

$$\vec{v}_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right), \quad \vec{v}_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right), \quad \vec{v}_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}\right)$$

relativi agli autovalori rispettivamente $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = 2$.

i) Scrivere la matrice A che rappresenta T nella base $\mathcal{B} = (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$.

ii) Scrivere la matrice A' che rappresenta T nella base canonica $\mathbb{E} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ di $\mathbb{R}^3$.

iii) Quanto vale $\det(A')$? E la traccia di A'? E il polinomio caratteristico di A'?

iv) Si consideri ora l'endomorfismo composizione $T^2 = T \circ T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. T^2 è invertibile?

v) Quali sono i suoi autovalori di T^2? L'endomorfismo T^2 è diagonalizzabile?

Suggerimento: si può rispondere alle domande iii),iv),v) senza trovare la matrice richiesta al punto ii).

Soluzione esercizio 2.

i) Essendo $\mathcal{B}$ una base di autovettori, la matrice A richiesta è diagonale con elementi diagonali gli autovalori. Dunque:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

ii) La matrice del cambiamento di base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3) \to (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$ è la matrice che ha per colonne le coordinate dei vettori $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$. Dunque il cambiamento di base inverso $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3) \to (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ è rappresentato dalla sua inversa M. calcolando, si ottiene:

$$A' = M^{-1}AM = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/6 & 7/6 & -1/3 \\ 7/6 & 1/6 & -1/3 \\ -1/3 & -1/3 & 5/3 \end{pmatrix}.$$

iii) Essendo determinante, traccia e polinomio caratteristico invarianti per similitudine, essi coincidono con quelli della matrice diagonale A: Dunque $\det = -2$, $\mathrm{tr} = 2$, polinomio caratteristico $= (\lambda - 1)(\lambda + 1)(\lambda - 2)$.

iv) + v) Essendo $\det T^2 = (\det T)^2 = (-2)^2 = 4 \neq 0$, T^2 è invertibile. I suoi autovalori sono i quadrati di quelli di T, ovvero $\lambda_1 = 1$ (con molteplicità algebrica e geometrica 2), e $\lambda_2 = 4$, e anche T^2 è dunque diagonalizzabile.

Esercizio 3. Sia assegnata la matrice $A_k = \begin{pmatrix} -2 & 5 & -3 \\ -3 & 6 & -3 \\ -1 & k & 0 \end{pmatrix}$, essendo k un parametro reale.

i) Determinare il valore di k per cui A_k ammette come autovalore $\lambda = 0$, e si denoti con A la matrice che si ottiene per tale valore di k.

ii) Verificare che A è una matrice diagonalizzabile.

iii) Determinare una matrice invertibile C che diagonalizza A, ossia tale che $C^{-1}AC$ sia una matrice diagonale.

Soluzione esercizio 3.

i) L'equazione caratteristica di A_k è $\det \begin{pmatrix} -2-\lambda & 5 & -3 \\ -3 & 6-\lambda & -3 \\ -1 & k & -\lambda \end{pmatrix} = 0$, ovvero $-\lambda^3 + 4\lambda^2 - 3k\lambda + 3k - 3 = 0$. Tale equazione ammette soluzione $\lambda = 0$ se e solo se $k = 1$. Pertanto la matrice richiesta è $A = \begin{pmatrix} -2 & 5 & -3 \\ -3 & 6 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

ii) L'equazione caratteristica di A è $-\lambda^3 + 4\lambda^2 - 3\lambda = \lambda(-\lambda^2 + 4\lambda - 3) = 0$, da cui i tre autovalori distinti $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 3$. Ne segue che A è diagonalizzabile.

iii) Per ottenere una matrice invertibile C tale che $C^{-1}AC$ sia diagonale, determiniamo una base di autovettori. Risulta:

$$V_{\lambda_1} : \begin{cases} -2x_1 & +5x_2 & -3x_3 & = & 0 \\ -3x_1 & +6x_2 & -3x_3 & = & 0 \\ -x_1 & +x_2 & & = & 0 \end{cases}$$

e quindi $V_{\lambda_1} = \{t(1,1,1)\}_{t\in\mathbf{R}}$. Una base di V_{λ_1} è dunque costituita dal solo autovettore $\vec{v}_1' = (1,1,1)$.

Si ha poi:

$$V_{\lambda_2} : \begin{cases} -3x_1 & +5x_2 & -3x_3 & = & 0 \\ -3x_1 & +5x_2 & -3x_3 & = & 0 \\ -x_1 & +x_2 & -x_3 & = & 0 \end{cases}$$

e quindi $V_{\lambda_2} = \{t(1,0,-1)\}_{t\in\mathbf{R}}$. Una base di V_{λ_2} è data dall' autovettore $\vec{v}_2' = (1,0,-1)$.

Infine:

$$V_{\lambda_3} : \begin{cases} -5x_1 & +5x_2 & -3x_3 & = & 0 \\ -3x_1 & +3x_2 & -3x_3 & = & 0 \\ -x_1 & +x_2 & -3x_3 & = & 0 \end{cases}$$

e quindi $V_{\lambda_3} = \{t(1,1,0)\}_{t\in\mathbf{R}}$. Una base di V_{λ_3} è data dall' autovettore $\vec{v}_3' = (1,1,0)$. Una base di autovettori è dunque $\vec{v}_1', \vec{v}_2', \vec{v}_3'$ e la matrice C richiesta ha per colonne le coordinate di tale tre vettori. Dunque:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 4. Si considerino in $\mathbb{R}^3$ i vettori

$$\vec{v}_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right), \quad \vec{v}_2 = \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

i) Verificare che $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ sono ortonormali e determinare il loro prodotto vettoriale $\vec{v}_3 = \vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2$.

ii) Si consideri l'endomorfismo $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definito dalle condizioni $T(\vec{v}_1) = \vec{v}_2,\ T(\vec{v}_2) = \vec{v}_3,\ T(\vec{v}_3) = \vec{v}_1$. Determinare il nucleo di T. Scrivere la matrice M che rappresenta T nella base $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$.

iii) Scrivere la matrice N che rappresenta T nella base canonica $\mathbb{E} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ di $\mathbb{R}^3$.

iv) Determinare gli autovalori reali di T, e (usando le coordinate canoniche di $\mathbb{R}^3$) le equazioni cartesiane degli autospazi di T.

Soluzione esercizio 4.

i) Risulta infatti:

$$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{1}{\sqrt{3}} = 1, \qquad \vec{v}_2 \cdot \vec{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} + (-\frac{1}{\sqrt{2}})(-\frac{1}{\sqrt{2}}) = 1,$$

$$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot 0 + \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}}(-\frac{1}{\sqrt{2}}) = 0.$$

Il prodotto vettoriale si ottiene con l'usuale formula:

$$\vec{v}_3 = \vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2 = \det A \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \vec{i}(-\frac{2}{\sqrt{6}}) + \vec{j}(\frac{1}{\sqrt{6}}) + \vec{k}(-\frac{2}{\sqrt{6}}) = (-\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}).$$

e pertanto i tre vettori costituiscono una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$.

ii) Poiché T manda la base $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$ in se stessa (riordinando i tre vettori), il suo nucleo si riduce al solo vettore nullo. T è evidentemente una rotazione di $\mathbb{R}^3$, e la matrice M che rappresenta T nella base $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$ è, per definizione:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

iii) Per scrivere la matrice N che rappresenta T nella base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, usiamo la matrice C del cambiamento di base (ortonormale) $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}) \to (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$. Risulta:

$$C = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}, \qquad \text{con inversa} \qquad C^{-1} = C^t = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}.$$

Otteniamo quindi:

$$N = CMC^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{3} & -\frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{\sqrt{2}}{6} & \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{\sqrt{2}}{6} \\ \frac{\sqrt{6}}{6} - \frac{\sqrt{2}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{6} + \frac{\sqrt{3}}{6} + \frac{\sqrt{2}}{6} & \frac{\sqrt{6}}{6} - \frac{\sqrt{3}}{6} + \frac{\sqrt{2}}{6} \\ -\frac{\sqrt{6}}{6} - \frac{\sqrt{2}}{3} & -\frac{\sqrt{6}}{6} + \frac{\sqrt{3}}{6} + \frac{\sqrt{2}}{6} & -\frac{\sqrt{6}}{6} - \frac{\sqrt{3}}{6} + \frac{\sqrt{2}}{6} \end{pmatrix}.$$

iv) + v) Essendo T una rotazione, l'unico suo autovalore reale è 1. Ciò può essere verificato dal polinomio caratteristico della matrice M (evidentemente scelta più semplice che non la matrice N, ad essa simile!) $\det(\lambda I - M) = \lambda^3 - 1 = (\lambda - 1)(\lambda^2 + \lambda + 1)$, e la stessa matrice M può essere utilizzata per determinarne l'autospazio. Nelle coordinate cartesiane (non canoniche!) (y_1, y_2, y_3) definite su $\mathbb{R}^3$ dalla scelta della base $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$, il sistema lineare omogeneo

$$M \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix},$$

fornisce le equazioni della retta vettoriale $r: \ y_1 = y_2 = y_3$ autospazio di T. Il piano di rotazione è invece il piano π ortogonale a r e ha equazione $y_1 + y_2 + y_3 = 0$, con coefficienti $(1, 1, 1)$, parametri direttori dell'autospazio r. Naturalmente sia r che π possono essere rappresentati nelle coordinate canoniche (x_1, x_2, x_3) di $\mathbb{R}^3$, legate alle precedenti (y_1, y_2, y_3) dalla matrice C:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = C^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = C^t \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}.$$

Esplicitamente $y_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}x_1 + \frac{1}{\sqrt{3}}x_2 + \frac{1}{\sqrt{3}}x_3$, $y_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}x_2 - \frac{1}{\sqrt{2}}x_3$, $y_3 = -\frac{2}{\sqrt{6}}x_1 + \frac{1}{\sqrt{6}}x_2 + \frac{1}{\sqrt{6}}x_3$. Le equazioni dell'asse r e del piano π di rotazione sono dunque:

$$\begin{aligned} r: &\quad \frac{1}{\sqrt{3}}x_1 + \frac{1}{\sqrt{3}}x_2 + \frac{1}{\sqrt{3}}x_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}x_2 - \frac{1}{\sqrt{2}}x_3 = -\frac{2}{\sqrt{6}}x_1 + \frac{1}{\sqrt{6}}x_2 + \frac{1}{\sqrt{6}}x_3 \\ \pi: &\quad \left(\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{2}{\sqrt{6}}\right)x_1 + \left(\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{6}}\right)x_2 + \left(\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{6}}\right)x_3. \end{aligned}$$