Geometria per Fisica (Canale L-Pa)

Foglio 5 - Soluzioni dell'esercitazione in classe del 14.1.2020

Esercizio 1. Si considerino le matrici:

$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 0 & 5 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

i) Stabilire quali tra le matrici A, B, C sono ortogonali.

ii)) Stabilire quali tra le matrici A, B, C ammettono l'autovalore $\lambda = 1$, e per esse determinarne il relativo autospazio.

Esercizio 2. Si considerino le matrici:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},$$

e si osservi che A, B sono simmetriche e dunque diagonalizzabili.

i) Sono simmetriche anche i quadrati $A^2 = AA, B^2 = BB$ e i prodotti AB, BA?

ii) Sono diagonalizzabili anche i quadrati $A^2 = AA, B^2 = BB$ e i prodotti AB, BA?

iii) Determinare "radici quadrate" di A e di B, ovvero matrici E e F tali che $E^2 = A$, $F^2 = B$.

Esercizio 3.

i) Stabilire per quali valori di $t \in \mathbb{C}$ è diagonalizzabile la matrice $A = \begin{pmatrix} i & t & 0 \\ 0 & t & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

ii) Sostituendo $t = -i$ si determini una matrice non singolare N tale che $N^{-1}AN$ sia diagonale.

Esercizio 4. Si consideri la forma bilineare simmetrica

$$g : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$$

definita sui vettori $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4), \vec{y} = (y_1, y_2, y_3, y_4) \in \mathbb{R}^4$ da

$$g(\vec{x}, \vec{y}) = x_1y_4 + x_2y_3 + x_3y_2 + x_4y_1.$$

i) Scrivere la matrice

$$G = \left(g_{\alpha\beta} = g(\vec{e}_\alpha, \vec{e}_\beta)\right)$$

associata a g nella base canonica $\vec{e}_1 = (1, 0, 0, 0), \vec{e}_2 = (0, 1, 0, 0), \vec{e}_3 = (0, 0, 1, 0), \vec{e}_4 = (0, 0, 0, 1)$ di $\mathbb{R}^4$.

ii) Stabilire se la matrice G è ortogonale e se l'operatore lineare $L_G : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ associato a B è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$.

Esercizio 5. Si consideri ora l'applicazione

$$h : \mathbb{C}^4 \times \mathbb{C}^4 \to \mathbb{C}$$

definita sui vettori $\vec{z} = (z_1, z_2, z_3, z_4), \vec{w} = (w_1, w_2, w_3, w_4) \in \mathbb{C}^4$ da

$$h(\vec{z}, \vec{w}) = z_1\bar{w}_4 + iz_2\bar{w}_3 - iz_3\bar{w}_2 + z_4\bar{w}_1.$$

i) Verificare che h è hermitiana, ovvero che $h(\vec{z},\vec{w}) = \overline{h(\vec{w},\vec{z})}$, scrivere la matrice

$$H = \big(h_{\alpha\beta} = h(\vec{e}_\alpha, \vec{e}_\beta)\big)$$

associata a h nella base canonica $\vec{e}_1 = (1,0,0,0), \vec{e}_2 = (0,1,0,0), \vec{e}_3 = (0,0,1,0), \vec{e}_4 = (0,0,0,1)$ di $\mathbb{C}^4$.

ii) Stabilire se la matrice H è hermitiana e se è unitaria.

iii) Detto $L_H : \mathbb{C}^4 \to \mathbb{C}^4$ l'operatore lineare associato a H, determinare i suoi autovalori e precisare se esiste una base ortonormale $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4)$ di $\mathbb{C}^4$ formata da suoi autovettori.

Soluzione esercizio 1.

i) La matrice A ha evidentemente righe (e colonne) tra loro ortonormali, ed è dunque una matrice ortogonale. Le matrici B e C non sono invece ortogonali: B non è infatti inveribile e C ha il primo vettore riga di modulo $\sqrt{5} \neq 1$.

ii) Per verificare quali tra A,B,C ammettono l'autovalore $\lambda = 1$, sostituiamo $\lambda = 1$ nei rispettivi polinomi caratteristici: nel caso il polinomio si annulli, $\lambda = 1$ è autovalore. Si ottiene:

$$\det(A - I) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{pmatrix} = 0 \qquad \text{(avendo le prime due righe una opposta dell'altra)},$$

$$\det(B - I) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = 0, \quad \det(C - I) = \begin{pmatrix} -1 & \sqrt{5} & 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & -1 & \frac{-2}{\sqrt{5}} & 0 \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} - 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{5} - 1 \end{pmatrix} \neq 0,$$

e dunque A e B ammettono l'autovalore 1. Il calcolo degli autospazi mostrano che per l'endomorfismo L_A l'autospazio risulta $V_1 = \ Span\ \{(1,1,0,0)\}$, e per L_B invece $V_1 = \ Span\ \{(0,1,1,0)\}$.

Soluzione esercizio 2.

i) E' evidente che $A = A^t$ implica $(A^2)^t = (AA)^t = A^t A^t = AA = A^2$, e similmente per B. Dunque il quadrato di qualunque matrice simmetrica è una matrice simmetrica. Naturalmente non vale la proprietà di simmetria per il prodotto di due matrici simmetriche che non commutano: p. es

$$AB = \begin{pmatrix} 13 & 11 \\ 8 & 7 \end{pmatrix}, \quad BA = \begin{pmatrix} 13 & 8 \\ 7 & 11 \end{pmatrix}.$$

ii) A^2 e B^2 sono diagonalizzabili per il teorema spettrale. Sono diagonalizzabili anche AB e BA: il loro (condiviso) polinomio caratteristico $\lambda^2 - 20\lambda + 10$ mostra infatti che entrambe hanno due autovalori distinti.

iii) Le matrici E e F possono trovarsi o con riferimento alle diagonalizzate di A e B, oppure con calcolo diretto. Risulta:

$$E = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Soluzione esercizio 3.

i) A è triangolare superiore, e i suoi autovalori sono pertanto i tre elementi diagonali: $i, t, 2$: Dunque per $t \neq i, 2$, i tre autovalori distinti mostrano che A è diagonalizzabile. I casi $t = i$ e $t = 2$ vanno discussi a parte. Per $t = i$ (i autovalore con molteplicità algebrica 2 si vede subito che l'autospazio è generato solo da $(1,0,0)$, e dunque per $T = i$, la matrice A non è diagonalizzabile. Invece, se $t = 2$, l'autospazio è generato da $(2,-i,0)$ e $(2,-i,1)$ e dunque A risulta diagonalizzabile.

ii) Quando $t = -i$ si ottiene

$$A(-i) = \begin{pmatrix} i & -i & 0 \\ 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

e un calcolo diretto mostra che autovettori dei tre autovalori distinti $2, i, -i$ sono rispettivamente i vettori $(0,0,1)$, $((1,0,0)$, $(1,2,0)$. Dunque, disponendo per colonne i tre autovettori abbiamo

$$N = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad N^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Soluzione esercizi 4 e 5.

Dalle espressioni della forma bilineare g e della forma sesquilineare h risulta subito

$$G = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

con autovalori $1, -1$ per entrambe le matrici e in entrambi i casi entrambi autovalori di molteplicità algebrica 2.

Le matrici G, H hanno righe ortonormali, risp. rispetto al prodotto scalare euclideo canonico di $\mathbb{R}^4$ e rispetto al prodotto scalare hermitiano canonico di $\mathbb{C}^4$; esse sono dunque risp. ortogonale reale simmetrica e unitaria hermitiana. Ciò è sufficiente a concludere che, per i teoremi spettrali, esse sono diagonalizzabili e che per entrambe esiste una base ortonormale di autovettori risp. in $\mathbb{R}^4$ e in $\mathbb{C}^4$.