# Geometria
# Prova scritta, I appello, sessione invernale
# Corso di laurea in fisica — A.A 2017/2018
# Canali A – C, L – Pa, Pb – Z

Durata: 2 ora e 30 minuti

Simone Diverio    Alessandro D'Andrea    Paolo Piccinni
Antonietta Venezia

23 gennaio 2018

**Esercizio 1.** Si consideri, al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$, il sistema lineare:

$$\begin{cases} -x & +ky & -z & = & k \\ -x & -y & +z & = & -1 \\ (k-1)x & +2ky & -(k+1)z & = & 2k. \end{cases}$$

(i) Scrivere la matrice $A \in M_{3,3}(\mathbb{R})$ dei coefficienti e la matrice $A' \in M_{3,4}(\mathbb{R})$ completa del sistema, e determinare al variare di $k$ il rango di $A$ e il rango di $A'$.

(ii) Stabilire per quali valori di $k$ il sistema ammette soluzioni e determinare per tali valori tutte le soluzioni.

(iii) Le tre equazioni del sistema rappresentano in $\mathbb{R}^3$ e al variare di $k$, dei piani affini. Descrivere, al variare di $k$, la loro intersezione (una retta?, un punto?, insieme vuoto?), scrivendo, per i valori di $k$ per cui si ottiene una retta $r$, le equazioni parametriche e le equazioni cartesiane di $r$.

**Esercizio 2.** Si consideri la matrice $A \in M_{3,3}(\mathbb{R})$ data da

$$A = \begin{pmatrix} -4 & -2 & 2 \\ 6 & 4 & -2 \\ -6 & -2 & 4 \end{pmatrix},$$

e l'operatore lineare ad essa associato

$$L_A \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3.$$

(i) Calcolare il polinomio caratteristico $p_{L_A}$ associato ad $L_A$ e determinare gli autovalori di $L_A$.

(ii) Determinare gli autospazi di $L_A$ specificandone in particolare la dimensione.

(iii) Se possibile, determinare una matrice $C \in M_{3,3}(\mathbb{R})$ tale che $C^{-1} \cdot A \cdot C$ è una matrice diagonale e calcolare il risultato di tale prodotto (senza necessariamente calcolare l'inversa) per ottenere un'eventuale forma diagonale per $L_A$.

**Esercizio 3.** Sia $V = \mathbb{R}_2[t]$ lo spazio vettoriale reale dei polinomi a coefficienti reali di grado minore o uguale a 2. Verificare o confutare le seguenti affermazioni, eventualmente mediante un controesempio.

(i) Il sottoinsieme $L \subset V$ definito da $L = \{p \in V \mid p'(t) = 2t + 1\}$ è un sottospazio affine.

(ii) Il sottoinsieme $U \subset V$ definito da $U = \{p \in V \mid p(2) \cdot p'(0) = 0\}$ è un sottospazio vettoriale, dove l'apice indica la derivata.

(iii) L'applicazione

$$\begin{aligned} T \colon V &\to V \\ p &\mapsto p(1)\, t^2 + p'(0)\, t + p(-1) \end{aligned}$$

è lineare, e il suo nucleo è banale.

**Esercizio 4.** Sia $T \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un'applicazione lineare il cui nucleo ha equazione $x_2 - 2x_3 = 0$; inoltre, supponiamo che

$$T \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(i) Determinare una base $\{v_1, v_2\}$ per $\ker T$.

(ii) Verificare che il vettore

$$v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

completa $\{v_1, v_2\}$ a una base $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ di $\mathbb{R}^3$.

(iii) Scrivere la matrice associata a $T$ nella base $\mathcal{B}$.

**Esercizio 5.** Siano dati i seguenti due sottospazi di $\mathbb{R}^4$:

$$U = \operatorname{Span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}, \quad W = \operatorname{Span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} \right\}.$$

Determinare equazioni cartesiane per i sottospazi $U + W$ e $U \cap W$.