Geometria — Appello I — Sessione Invernale
Corso di laurea in fisica — a.a. 2019/2020 — Tutti i Canali

Durata: 2 ore e 30 minuti

Proff. P. Bravi, S. Diverio, G. Mondello, P. Piccinni, R. Salvati Manni

20 gennaio 2020

Esercizio 1. Si consideri il seguente sistema lineare a coefficienti reali, di tre equazioni in tre incognite, con parametro reale k:

$$\begin{cases} kx + y = 2 \\ x + kz = 2 \\ ky - z = 1 \end{cases} .$$

Determinare per quali valori di k il sistema è compatibile, e per tali valori determinare l'insieme delle soluzioni.

Esercizio 2. Sia $T\colon \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ l'endomorfismo espresso in coordinate da

$$T\begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z + iw \\ -iz + w \end{pmatrix}.$$

Determinare, se esiste, una base di autovettori di T che sia unitaria (cioè ortonormale) rispetto al prodotto hermitiano canonico di $\mathbb{C}^2$.

Esercizio 3. Si consideri lo spazio vettoriale $\mathbb{R}_{\leq 2}[x]$ dei polinomi a coefficienti reali di grado minore o uguale a due nell'indeterminata x. Si considerino i seguenti due suoi sottoinsiemi:

$$U = \{p \in \mathbb{R}_{\leq 2}[x] \mid p(0) = 0\}, \quad V = \{p \in \mathbb{R}_{\leq 2}[x] \mid p'(0) + p(1) = 0\},$$

dove con l'apice si indica la derivata prima. Verificare che U e V sono sottospazi vettoriali, e determinare una base per U, V, $U \cap V$, e $U + V$.

Esercizio 4. Si consideri l'unica applicazione lineare $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tale che

$$T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad T\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad T\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Determinare la matrice associata a T, rispetto alle basi canoniche degli spazi di partenza ed arrivo. Determinare una base per il nucleo e per l'immagine di T.

Esercizio 5. Sia $V \subseteq \mathbb{R}^3$ il sottospazio vettoriale descritto dall'equazione cartesiana $x - y + z = 0$.

i) Determinare equazioni cartesiane per $V^{\perp_{\langle\cdot,\cdot\rangle}}$, complemento ortogonale di V rispetto al prodotto scalare canonico $\langle\cdot,\cdot\rangle$ di $\mathbb{R}^3$.

ii) Si consideri poi in $\mathbb{R}^3$ il prodotto scalare definito positivo $g(\cdot,\cdot)$ la cui matrice associata nella base canonica $\{e_1, e_2, e_3\}$ di $\mathbb{R}^3$ è

$$G = \big(g(e_i, e_j)\big)_{i,j} = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Determinare una base per $V^{\perp_g}$, complemento ortogonale di V rispetto al prodotto scalare g.