Geometria
Appello II— Sessione Invernale
Corso di laurea in fisica — a.a. 2019/2020
Tutti i Canali

DURATA: 2 ORE E 30 MINUTI

Paolo Bravi Simone Diverio Gabriele Mondello Paolo Piccinni
Riccardo Salvati Manni

4 febbraio 2020

Esercizio 1. Sia $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, e si considerino i sottospazi vettoriali di $M_2(\mathbb{R})$:

$$U = \left\{ X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}, \text{ con } BX = XB \right\}, \quad V = \left\{ X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}, \text{ con } BX = -XB \right\}.$$

Determinare dimensioni e basi dei sottospazi vettoriali $U, V, U \cap V, U + V$.

Esercizio 2. Si determinino, nel campo complesso $\mathbb{C}$, tutte le soluzioni per ognuna delle seguenti due equazioni:

$$|z|^2 = \bar{z}^2 \qquad \text{e} \qquad |z|^2 = -\bar{z}^2$$

dove $z = a + ib \in \mathbb{C}$ e $\bar{z} = a - ib$ è il suo coniugato.

Esercizio 3. Si consideri in $M_2(\mathbb{C})$ la matrice $B = \begin{pmatrix} -2 & 2i \\ 2i & 2 \end{pmatrix}$.
Calcolare la traccia e il determinante di B e dedurne (possibilmente senza polinomio caratteristico) quali sono gli autovalori di B. Si può concludere da ciò se B è diagonalizzabile? B è simmetrica e/o hermitiana e/o unitaria?

Esercizio 4. Si consideri la forma bilineare simmetrica $g : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ definita da

$$g(\vec{x}, \vec{y}) = 3x_2y_2 + x_2y_4 + x_1y_1 + x_3y_3 + x_4y_2.$$

Stabilire se g è definita positiva e determinare, se esiste, un vettore non nullo $x \in \mathbb{R}^4$ isotropo rispetto a g, ovvero tale che $g(\vec{x}, \vec{x}) = 0$.

Esercizio 5. Si consideri l'endomorfismo $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definito da

$$F(x_1, x_2, x_3) = (-4x_1 - 3x_3,\ -3x_1 - x_2 - 3x_3,\ 6x_1 + 5x_3,).$$

Verificare che F è diagonalizzabile, determinando una base di suoi autovettori e una matrice non singolare C tale che, se A è la matrice di F, $A' = C^{-1}AC$ sia diagonale.

(Compito B)