Prova scritta di Geometria - Corso di laurea in fisica - a.a. 2019/20

Proff. P. Bravi e P. Piccinni (D-K e L-Pa)
23 giugno 2020
Durata della prova: 2 ore

Esercizio 1. Si consideri il sistema lineare omogeneo

$$\begin{cases} x_1 & -kx_2 & +x_3 & -x_4 = 0 \\ x_1 & -x_2 & +kx_3 & -x_4 = 0 \end{cases}$$

dove $k \in \mathbb{R}$ è un parametro.

i) Stabilire per quali valori di k il sistema ammette soluzioni non nulle.

ii) Detto W_k l'insieme di tutte le soluzioni, stabilire se W_k è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$, e in caso determinarne la dimensione e una base al variare di k.

Esercizio 2.

i) Scrivere le coordinate del vettore v rispetto alla base $\mathcal{B}$.

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

ii) Applicare alla base $\mathcal{B}$ il procedimento di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt e scrivere le coordinate del vettore v rispetto alla base ottenuta.

Esercizio 3. Sia A la matrice seguente

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

i) Dire se A è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$ e, in caso affermativo, determinare una matrice invertibile M a coefficienti in $\mathbb{R}$ tale che $M^{-1}A\,M$ sia diagonale.

ii) Dire se A è diagonalizzabile su $\mathbb{C}$ e, in caso affermativo, determinare una matrice invertibile N a coefficienti in $\mathbb{C}$ tale che $N^{-1}A\,N$ sia diagonale.

Esercizio 4. Sia $V^3 = \mathbb{R}_{\leq 2}[x]$ lo spazio vettoriale dei polinomi a coefficienti in $\mathbb{R}$ di grado minore o uguale a 2 nell'indeterminata x, e siano $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$, $q(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 \in V^3$. Si consideri la forma bilineare simmetrica $g : V^3 \times V^3 \to \mathbb{R}$ definita da

$$g(p(x), q(x)) = p(-2)q(-2) + p(2)q(2).$$

i) Stabilire se g è definita positiva e determinare, se esiste, un polinomio non nullo $p(x) \in V^3$ isotropo rispetto a g, ovvero tale che $g(p(x), p(x)) = 0$.

ii) Stabilire se la base $\{1, x, x^2\}$ di V^3 è ortonormale rispetto a g.

iii) Stabilire se l'endomorfismo $F : V^3 \to V^3$, definito da $F(p(x)) = -p(x)$ è autoaggiunto rispetto a g.