Prova scritta di Geometria - Corso di laurea in fisica - a.a. 2019/20

Proff. P. Bravi e P. Piccinni (D-K e L-Pa)
13 luglio 2020
Durata della prova: 2 ore

Esercizio 1. Si considerino in $M_2(\mathbb{C})$ le matrici

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad A_4 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}.$$

i) Stabilire se A_1, A_2, A_3, A_4 formano una base dello spazio vettoriale complesso $M_2(\mathbb{C})$.

ii) Stabilire quali tra A_1, A_2, A_3, A_4 sono simmetriche ($A = A^t$), quali antisimmetriche ($A = -A^t$) quali hermitiane ($A = \overline{A}^t$), quali antihermitiane ($A = -\overline{A}^t$).

iii) Stabilire quali tra A_1, A_2, A_3, A_4 sono diagonalizzabili su $\mathbb{C}$.

Esercizio 2. Si consideri l'endomorfismo $F : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ definito da $F(A) = A + 2A^t$.

i) Determinare il nucleo e l'immagine di F.

ii) Stabilire se F ammette autovalori reali e se è diagonalizzabile.

Esercizio 3. Sia W il sottospazio di $\mathbb{R}^3$ di equazione $x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0$. Determinare una base del complemento ortogonale $W^\perp$ rispetto al prodotto scalare canonico. Scrivere l'espressione in coordinate della proiezione ortogonale su W, $p_W \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, e della proiezione ortogonale su $W^\perp$, $p_{W^\perp} \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$.

Esercizio 4. Sia (e_1, e_2, e_3) la base canonica di $\mathbb{R}^3$.

i) Determinare, se esiste, una forma bilineare simmetrica su $\mathbb{R}^3$, $g \colon \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, tale che

$$g(e_1, e_1) = g(e_2, e_2) = g(e_3, e_3) = -2$$

e che sia definita positiva sul sottospazio vettoriale U di $\mathbb{R}^3$ generato dai vettori $e_1 + e_2$ ed $e_2 + e_3$.

ii) Per tale forma bilineare simmetrica g determinare, se esiste, un vettore non nullo $v \in \mathbb{R}^3$ isotropo rispetto a g e una base del complemento ortogonale di U rispetto a g.