Prova scritta di Geometria - Corso di laurea in fisica - a.a. 2019/20

Proff. P. Bravi e P. Piccinni (D-K e L-Pa)
13 luglio 2020
Risposte

Esercizio 1. Si considerino in $M_2(\mathbb{C})$ le matrici

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad A_4 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}.$$

i) Stabilire se A_1, A_2, A_3, A_4 formano una base dello spazio vettoriale complesso $M_2(\mathbb{C})$.
ii) Stabilire quali tra A_1, A_2, A_3, A_4 sono simmetriche ($A = A^t$), quali antisimmetriche ($A = -A^t$) quali hermitiane ($A = \overline{A}^t$), quali antihermitiane ($A = -\overline{A}^t$).
iii) Stabilire quali tra A_1, A_2, A_3, A_4 sono diagonalizzabili su $\mathbb{C}$.

Risposte: i) La relazione

$$\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \lambda_3 A_3 + \lambda_4 A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

implica subito $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$, e dunque le quattro matrici costituiscono una base di $M_2(\mathbb{C})$.
ii) Si vede subito che A_1 è simmetrica e antihermitiana, A_2 è antisimmetrica e antihermitiana, A_3 è simmetrica e antihermitiana, A_4 è simmetrica e antihermitiana.
iii) A_3 e A_4 sono gi
a diagonali. A_1 e A_2 hanno due autovalori distinti i e $-i$, e sono dunque anch'esse diagonalizzabili.

Esercizio 2. Si consideri l'endomorfismo $F : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ definito da $F(A) = A + 2A^t$.
i) Determinare il nucleo e l'immagine di F.
ii) Stabilire se F ammette autovalori reali e se è diagonalizzabile.

Risposte: i) La relazione

$$A_1 + 2A_2 = \begin{pmatrix} 3a_{11} & a_{12} + 2a_{21} \\ 2a_{12} + a_{21} & 3a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

implica subito $a_{11} = a_{12} = a_{21} = a_{22} = 0$, e dunque $\ker F = 0$ e per il teorema del rango $imF =: M_2(\mathbb{R})$.
ii) Il calcolo degli autovalori fornisce due autovalori $\lambda = 3$ (molteplicità algebrica 3), con autospazio evidentemente le matrici simmetriche, e $\lambda = -1$ con autospazio le matrici antisimmetriche. Ne segue che F è diagonalizzabile.

Esercizio 3. Sia W il sottospazio di $\mathbb{R}^3$ di equazione $x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0$. Determinare una base del complemento ortogonale $W^\perp$ rispetto al prodotto scalare canonico. Scrivere l'espressione in coordinate della proiezione ortogonale su W, $p_W : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, e della proiezione ortogonale su $W^\perp$, $p_{W^\perp} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$.

Risposte: Il sottospazio $W^\perp$ è generato dal vettore $(1, 2, 3)$, di componenti i coefficienti dell'equazione di W. Equivalentemente è generato dal suo normalizzato

$$\vec{u} = \Big(\frac{1}{\sqrt{14}}, \frac{2}{\sqrt{14}}, \frac{3}{\sqrt{14}}, \Big).$$

Se $\vec{v} = (x_1, x_2, x_3)$, le equazioni delle due proiezioni si ottengono da

$$pr_{W^\perp}\vec{v} = < \vec{v}, \vec{u} > \vec{u} = \left(\frac{x_1 + 2x_2 + 3x_3}{14}, \frac{2x_1 + 4x_2 + 6x_3}{14}, \frac{3x_1 + 6x_2 + 9x_3}{14} \right)$$

e

$$pr_W\vec{v} = \vec{v} - pr_{W^\perp}\vec{v} = \left(\frac{13x_1 - 2x_2 - 3x_3}{14}, \frac{-2x_1 + 10x_2 - 6x_3}{14}, \frac{-3x_1 - 6x_2 + 5x_3}{14} \right).$$

Esercizio 4. Sia (e_1, e_2, e_3) la base canonica di $\mathbb{R}^3$.

i) Determinare, se esiste, una forma bilineare simmetrica su $\mathbb{R}^3$, $g\colon \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, tale che

$$g(e_1, e_1) = g(e_2, e_2) = g(e_3, e_3) = -2$$

e che sia definita positiva sul sottospazio vettoriale U di $\mathbb{R}^3$ generato dai vettori $e_1 + e_2$ ed $e_2 + e_3$.

ii) Per tale forma bilineare simmetrica g determinare, se esiste, un vettore non nullo $v \in \mathbb{R}^3$ isotropo rispetto a g e una base del complemento ortogonale di U rispetto a g.

Risposte: Dalle condizioni assegnate, un calcolo diretto mostra che una possibile matrice associata alla g richiesta è

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -4 \\ 3 & -2 & 3 \\ -4 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

e che i (necessariamente esistenti) vettori isoropi $\vec{v} = (x_1, x_2, x_3)$ soddisfano la seguente equazione:

$$-2x_1^2 - 2x_2^2 - 2x_3^2 + 6x_1x_2 + 6x_2x_3.$$