Prova scritta di Geometria - Corso di laurea in fisica - a.a. 2019/20

Proff. P. Bravi e P. Piccinni (D-K e L-Pa)
14 settembre 2020
Durata della prova: 2 ore

Esercizio 1. Si consideri il seguente sistema lineare a coefficienti reali, di tre equazioni in tre incognite, con parametro reale k:

$$\begin{cases} x + z = 2 \\ x - ky = 1 \\ y + kz = -1 \end{cases}.$$

Determinare per quali valori di k il sistema è compatibile, e per tali valori determinare l'insieme delle soluzioni.

Esercizio 2. Si considerino lo spazio vettoriale $V = \mathbb{C}[z]_{\leq 2}$ dei polinomi di grado minore o uguale a 2 a coefficienti complessi nell'indeterminata z, e i suoi sottoinsiemi

$$U = \{p(z) \in V \ : \ p(z) = p(\overline{z})\}, \quad W = \{p(z) \in V \ : \ p(z) = \overline{p(z)}\}.$$

i) Determinare quali dei seguenti U, W, $U \cap W$ sono $\mathbb{C}$-sottospazi vettoriali di V e per tali sottospazi calcolare la dimensione (su $\mathbb{C}$).

ii) Determinare quali dei seguenti U, W, $U \cap W$ sono $\mathbb{R}$-sottospazi vettoriali di V e per tali sottospazi calcolare la dimensione (su $\mathbb{R}$).

Esercizio 3. Siano u_1 e u_2 i seguenti vettori di $\mathbb{R}^3$

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Mostrare che l'endomorfismo $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che, per ogni $v \in \mathbb{R}^3$,

$$f(v) = \langle v, u_1 \rangle u_1 + \langle v, u_2 \rangle u_2$$

è simmetrico (rispetto al prodotto scalare canonico $\langle \ , \ \rangle$) e determinare una base ortogonale di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori di f.

Esercizio 4. Ricordiamo che la traccia $\mathrm{tr}(A)$ di una matrice quadrata A è la somma degli elementi sulla diagonale di A. Sullo spazio vettoriale $V = \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ delle matrici reali 2×2 consideriamo la forma bilineare simmetrica g data da

$$g(A, B) = \mathrm{tr}(AB).$$

Stabilire se g è definita positiva e determinare, se esiste, una matrice non nulla $A \in V$ isotropa rispetto a g, ovvero tale che $g(A, A) = 0$.